Série A, ORSAY
N° d'ordre :
106
oooooo

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre GINIBRE

1ère Thèse

Contribution à l'étude des matrices densités réduites des gaz quantiques

2ème Thèse : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 25 Mai 1965 devant la Commission d'examen

MM. LEVY — *Président*

YVON, RUELLE — *Examinateurs*

Série A, ORSAY
N° d'ordre :
106
oooooo

THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS
CENTRE D'ORSAY

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean-Pierre GINIBRE

1ère Thèse

Contribution à l'étude des matrices densités réduites des gaz quantiques

2ème Thèse : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 25 Mai 1965 devant la Commission d'examen

MM. LEVY — *Président*

YVON, RUELLE — *Examinateurs*

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

- PROFESSEURS -

Doyen M. ZAMANSKY

BRELOT	T analyse supérieure
PRENANT	T anatomie et histologie comparée
GRASSE	T évolution des êtres organisés
PREVOST	T chimie organique
WYART	T minéralogie et cristallog.
TEISSIER	T zoologie
MANGENOT	T biologie végétale (Orsay)
AUGER	T physique quantique et relativité
MONNIER	T physiologie générale
PIVETEAU	T paléontologie
ROCARD	T physique (ENS)
CARTAN	T mathématiques (ENS)
LAFFITTE	T chimie générale
N...	T géométrie supérieure
COULOMB	T physique du globe
Mlle COUSIN	T biologie animale SPCN
CHRETIEN	T chimie minérale
BOCQUET	T zoologie
KASTLER	T physique(ENS)
EPHRUSSI	T génétique
RIVIERE	T géologie SPCN et sédimento. (Orsay)
GAUTHERET	T biologie végétale PCB
LUCAS R.	T recherches physiques
THOMAS A.	T biologie cellulaire
ARNULF	T optique appliquée
MORAND	T physique enseignement
SOLEILLET	T physique PCB
FORTIER	T mécanique expérimentale des fluides
DRACH	T zoologie
QUENEY	T météorologie et dynamique atmosph.
GALLIEN	T embryologie
EICHHORN	T botanique
DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN
Mlle CAUCHOIS	T chimie physique
THELLIER	T physique du globe
L'HERITIER	T biologie générale (Orsay)
GRIVET	T radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T mecanique générale
DUBREIL	T arithm. et théorie des nombres
CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T micropaléontologie
JUNG	T géologie
TRILLAT	T microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T chimie organique et structurale
JACQUINOT	T spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T théories physiques
AMIEL	T chimie générale
HOCART	T minéralogie et cristallographie
MATHIEU J.P.	T physique optique
COUTEAUX	T cytologie
MAY	T zoologie
CHOQUET	T théorie des fonctions et topologie
FELDMANN	T biologie végétale marine
GUINIER	T physique des solides (Orsay)
JOST	T physiologie comparée
FORTET	T calcul des probabilités et phy. math.
SCHWARTZ	T calcul dif. et intégral
CHOUARD	T physiologie végétale
MALAVARD	T aviation (techn. aéron.)
NORMANT	T synthèse organique
BENARD	T chimie minérale
BUVAT	T botanique (ENS)
DUGUE	T statistiques mathématiques
SOULAIRAC	T psychophysiologie
ULRICH	T physiologie végétale appl.
MARECHAL	T optique théor. et appl.
KIRRMANN	T théories chimiques
CHADEFAUD	T botanique
Mlle LE BRETON	T physiologie de la nutrit.
LELONG	T application de l'analyse à la géom.
DEVILLERS	T anatomie et histologie comparée
EHRESMANN	T topologie algébrique
FRANCON	T physique SPCN
GLANGEAUD	T géographie phys. et géologie dynam.
DODEMENT	T mathématiques MGP
PISOT	T techniques mathématiques de la phys.
QUELET	T chimie organique
CAGNIARD	T géophysique appliquée
LENNUIER	T physique MGP
RIZET	T génétique (Orsay)
ROUTHIER	T géologie appliquée
Mme TONNELAT	T physique théorique
DIXMIER	T mathématiques MPC
SOUCHAY	T chimie générale
AIGRAIN	T électrotechnique générale
BRUSSET	T chimie systématique
LEVY M.	T physique théorique et htes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T chimie biologique
Mme HUREL PY	T biologie végétale PCB
PANNETIER	T chimie générale
BRUN	T mécanique des fluides I
LEDERER	T chimie biologique (Orsay)
Mme DUBREIL	T mathématiques (agrégat)
Mme LELONG	T mathématiques II (ENS)
BELLAIR	T géologie SPCN
COTTE	T physique électricité
DUBOIS J.E.	T chimie organique
LAMOTTE	T zoologie (ENS)
MICHEL A.	T chimie minérale (Orsay)
OLMER	T énergétique générale
ROUAULT	T électricité (Orsay)
GAUTHIER	T mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T chimie physique
BROSSEL	T physique atomique
BUSER	T physiologie comparée
CAMUS	T physiologie végétale
CASTAING	T physique II thermodynamique (Orsay)
CURIEN	T minéralogie et cristallographie
MOYSE	T physiologie végétale (Orsay)
Mme CHARNIAUX-COTTON	T évolution des êtres organisés
POSSOMPES	T zoologie
PULLMANN	T chimie quantique
TEILLAC	T physique nucléaire et radioact. (Orsay)
TONNELAT	T biologie-physico-chimique (Orsay)
VILLE	T économétrie
WILLEMART	T chimie PCB
DODE	T chimie (Orsay)
FREYMANN	T recherches physiques
GUINOCHET	T biologie végétale SPCN (Orsay)
ROCH	T géologie
SCHATZMANN	T astrophysique
TERMIER	T géologie générale
ZAMANSKY	T mathématiques générales
LUCAS	T géologie
ALLARD	T chimie physique
BERTHELOT	T physique des particules fondamentales (Ors.)
BRICARD	T météorol. et physique de l'atmosphère (Ors.)
Mme ALBE FESSARD	T psycho-physiologie
FRIEDEL	T physique des solides (Orsay)
JULIA M.	T études des molécul. naturelles complexes
LENDER	T biologie animale SPCN (Orsay)
MAGAT	T physico-chimie des radio-éléments
Mlle QUINTIN	T électrochimie
MONOD	T chimie du métabolisme
BENOIT	T physiologie animale (Orsay)
DE POSSEL	T analyse numérique
CHARLOT	T chimie analytique
LEMEE	T écologie végétale (Orsay)
GUERIN	T chimie MPC (Orsay)
CHATELET	T chimie PCB
JEAN	T physique nucléaire (Orsay)
MATTLER	T physique SPCN
BERGERARD	T zoologie (Orsay)
BERTEIN	T électronique (Orsay)
BOUISSIERES	T radiochimie
Mme COUTURE	T thermodyn. et méca. phys.
ELLEMBERGER	T géologie des grandes régions du globe (Ors.)
FRANC	T biologie animale PCB
SCHNELL	botanique tropicale
STLKOWSKI	T physiologie végétale
ACHER	T chimie biologique
BAUDOIN	T biologie animale PCB
BEAUMONT	biologie animale SPCN
BLAMONT	géophysique ionosphère
BOUREAU	T botanique
CURIE D.	physique MGP
DURAND DELGA	T géologie
FREON	T chimie organique (Orsay)
HELLER	T physiologie végétale
TORTRAT	T calcul des probabilités
CAILLEUX	T géologie SPCN
MAGNAN	physique électricité
DAUDEL	T mecanique ondulatoire appliquée à la chimie théor. et à la phys. nucléaire
ROLLET	T chimie minérale
Mlle JOSIEN	T chimie SPCN
CHEVALLEY	T géométrie algèbrique et théorie des groupes
ARNOULT	T électronique (Orsay)
CHAPELLE	T physique I (Orsay)
DELANGE	T mathématiques I (Orsay)
DENY	T mathématiques générales (Orsay)
GERMAIN	T mécanique théorique des fluides
LACOMBE	T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
BROCHARD	T physique MGP (Orsay)
CABANNES	T mécanique générale
LESIEUR	T mathématiques I (Orsay)
MAZET	T mécanique générale (Orsay)
CAIRE	géographie phys. et géol. dynamique
COMOLET	mécanique des fluides
CORABOEUF	T physiologie animale (Orsay)
DELLOUE	T physique de l'exosphère
GORENFLOT	botanique II (Orsay)
HOUILLON	biologie animale PCB
JULLIEN J.	chimie SPCN (Orsay)
MALGRANGE	T techniques math. de la phys. (Orsay)
OLIVIER	anthropologie
NOZERAN	T botanique II (Orsay)
BLANC LAPIERRE	T physique ENS (Orsay)
CHEVAUGEON	T botanique (Orsay)
KAHANE	T mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T mathématiques ENS féminine
KOURGANOFF	T astronomie (Orsay)
THIRY	T mécanique céleste
ABELES	physique SPCN
AMAT	T physique PCB
AUBOIN	T géologie
Mme BENOIST-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
BOUGIS	biologie marine Villefranche s/Mer
BRUHAT	T mathématiques MPC
BRUNN	T géologie historique (Orsay)
CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
DEHEUVELS	T mathématiques propédeutique
D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
FURON	T géologie SPCN
Mme GANS	T génétique
GENEVES	biologie végétale PCB
GUILBERT	physique CSU Orléans
HUPE	T pétrographie
HOLLANDE	T biologie générale
LIONS	T analyse numérique
MAITTE	T chimie PCB
MEYER	physique propédeutique
NICOLAS	géologie appliquée

PANIGEL	biologie générale
Mlle FOURCROY	biologie végétale SPCN
Mme CHOQUET-BRUHAT	T mécanique analytique et mécanique céleste
Mlle VEIL	T physiologie générale
LWOFF	T microbiologie
SIESTRUNCK	T mécanique physique et expérimentale
NERON	T mathématiques MPC (Orsay)
Mme PECKER-WIMEL	T astrophysique
BALKANSKY	physique MPC
LE CORRE	T électricité
DELCROIX	T physique des milieux ionisés
GOURDIN	physique théorique et htes énergies (Ors.)
LEHMANN	T physique expérimentale des htes énergies
NATAF	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
ECHALIER	biologie animale PCB
BARRAUD	physiologie cellulaire
LIORET	T physiologie végétale (Orsay)
DARS	géologie structurale et géologie appliquée
CAMEFORT	T botanique (agrégation)
VICHNIEWSKY	T mécanique industrielle
BLAQUIERE	électronique (Orsay)
ARNOUS	T physique théorique
TATIBOUET	chimie CSU Orléans
MALLIAVIN	T mathématiques propédeutique (Orsay)
GAUDEMAR	chimie propédeutique
PEREZ Y JORBA	physique expérimentale des htes énergies (Ors.)
DAVID	T chimie (agrégation Orsay)
BROUSSE	T mécanique théorique
ROSCH	T astronomie
GUY	T physique expérimentale
LAZARD	mathématiques MPC
MOREL P.	physique MPC
ARSAC	programmation
LEFEBVRE	chimie MPC
CHAPEVILLE	biochimie
BENOIT	physique CPEM
RIO	chimie CPEM
JAUZEIN	géologie (ENS)
PREVOST G.	biologie végétale CPEM
FAVARD P.	biologie animale CPEM
VILKAS	chimie CPEM
Mlle FICINI	chimie CPEM
LEQUEUX	astronomie
COHEN TANNOUDJI	physique MPC
TAVERNIER	physique CPEM
Mme ROIZEN	physique CPEM
DURAND M.	biologie animale SPCN
RAVIER	pétrographie
ROSEAU	T mécanique théorique des fluides
ROUBINE	électronique
SILBER	T chimie PCB
UEBERSFELD	T électronique
YVON	T théories physiques
HERVE	T mathématiques
JANCOVICI	physique atomique (Orsay)
FALK-VAIRANT	physique nucléaire (Orsay)
FETIZON	chimie propédeutique (Orsay)
CERF	mathématiques (Orsay)
PASCAUD	physiologie
Mme PETIT	biologie animale CPEM
BROUSSE	géologie (Orsay)
CAGNAC	physique agrégation (Orsay)
LEBERRE	zoologie (Orsay)
SCHAEFFER	microbiologie (Orsay)
DE GENNES	physique des solides (Orsay)
RIOU	physique nucléaire expérimentale (Orsay)
CLAUSER	chimie biologique (Orsay)
CHEVALIER	physiologie animale (Orsay)

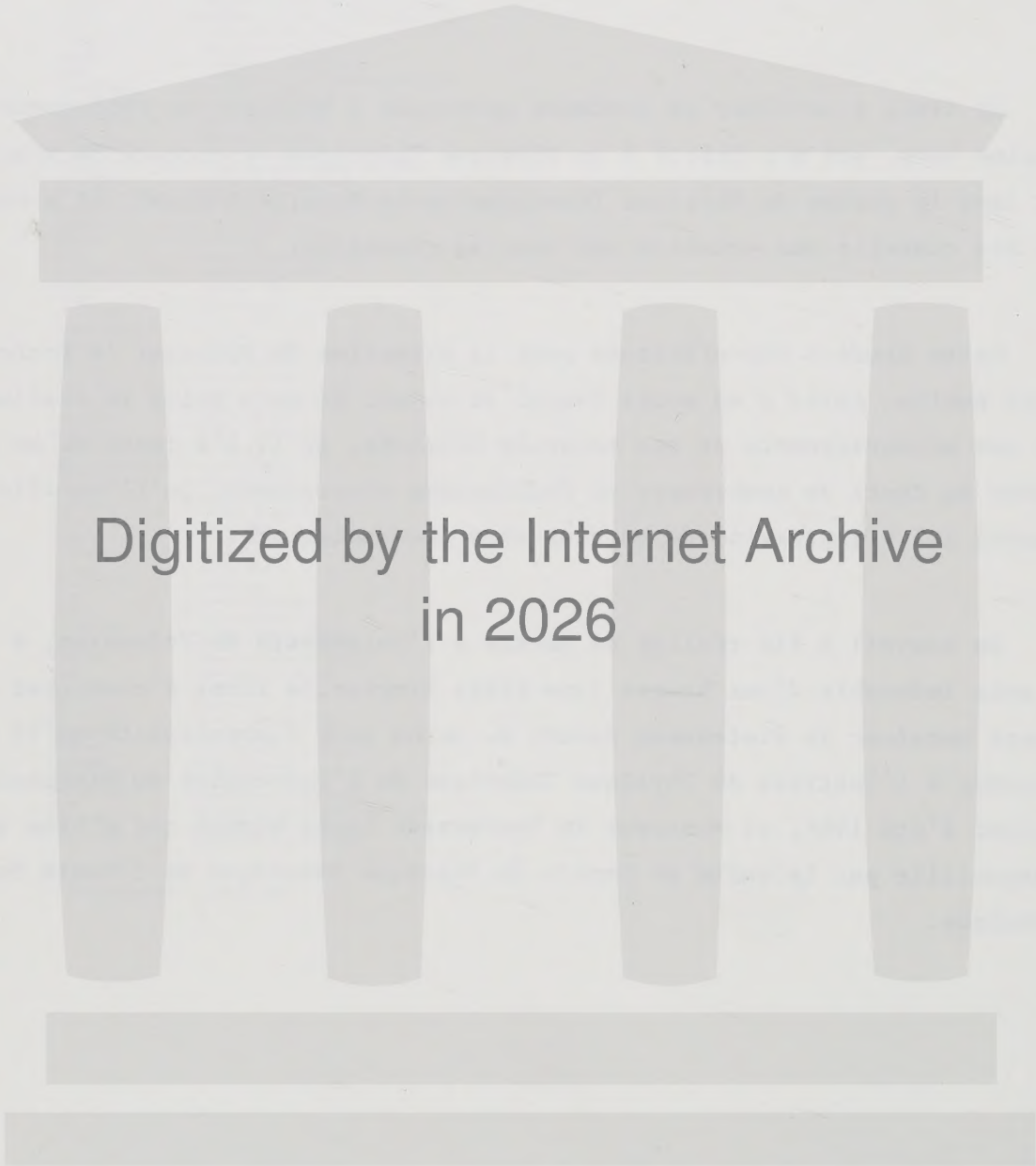
Le secrétaire général : R. POULLAIN.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur Maurice Lévy, qui m'a initié à la Physique Théorique, a accepté de m'accueillir dans le groupe de Physique Théorique de la Faculté d'Orsay, et a guidé par ses conseils mes premiers pas dans la recherche.

Cette étude a été effectuée sous la direction de Monsieur le Professeur David Ruelle. Après m'en avoir fourni le sujet, il en a guidé la réalisation par ses encouragements et ses conseils éclairés, qu'il n'a cessé de me prodiguer au cours de nombreuses et fructueuses discussions. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma très vive reconnaissance.

Ce travail a été réalisé en partie à l'Université de Princeton, à qui je suis redevable d'une bourse Jane Eliza Procter.Je tiens à remercier également Monsieur le Professeur Robert G. Sachs pour l'hospitalité qu'il m'a accordée à l'Institut de Physique Théorique de l'Université du Wisconsin pendant l'été 1964, et Monsieur le Professeur Louis Michel qui a bien voulu m'accueillir par la suite au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534912_0007

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

I - Préliminaires 8
1) Conditions sur le potentiel 8
2) Intégrale de Wiener 12
3) Définition des Matrices densités réduites 26

II - Cadre mathématique 41
1) Statistique de Boltzmann 41
2) Satistiques quantiques 53

III - Les équations de Kirkwood Salzburg quantiques 69
1) Equations de Kirkwood Salzburg dans le cas (SB) 69
2) Equations de Kirkwood Salzburg dans le cas (SQ) 82

IV - La limite du volume infini 92

V - Majorations directes et propriétés de factorisation 109
1) Statistique de Boltzmann 110
2) Statistiques quantiques 12

VI - Relation avec la théorie quantique des champs 139
1) Positivité des matrices densités réduites 140
2) Construction d'un modèle de théorie des champs 153

CONCLUSION 159

APPENDICE 164

1) Statistique de Boltzmann 164

2) Statistiques quantiques 173

REFERENCES 180

INTRODUCTION

L'objet de la mécanique statistique est de décrire des systèmes formés d'un grand nombre de particules, l'ordre de grandeur de celui-ci se situant vers 10^{22}. Plus précisément, on connait ou du moins on suppose connues les propriétés microscopiques de ces particules : par exemple, on admet qu'elles obéissent aux lois de la mécanique classique ou quantique, et interagissent par des potentiels locaux. De ces propriétés on cherche à déduire le comportement macroscopique du système et en particulier à obtenir ses propriétés thermodynamiques. On définit donc de façon convenable les notions d'équilibre et de température, et pour un système en équilibre, on introduit un certain nombre de quantités définies à partir des données microscopiques et pouvant être calculées à partir d'elles, et qu'on identifie par la suite avec les variables thermodynamiques du système, en particulier sa pression. A partir d'un certain nombre de postulats et de théorèmes dont le rôle n'est pas encore parfaitement clair [1], on a construit plusieurs formalismes qui répondent au moins en principe à ces exigences, et donnent un certain nombre de règles permettant de calculer les variables thermodynamiques du système à partir des données microscopiques. Par exemple, dans le formalisme canonique, on construit la fonction de partition Q_N d'un système de N particules enfermées dans une région bornée de volume V, et on obtient l'énergie libre par particule correspondant à la densité ρ par la relation

$$F(\beta,\rho) = \lim_{N \to \infty} -\frac{1}{\beta N} \operatorname{Log} Q_N \qquad (1)$$

où $\beta = 1/kT$, T étant la température absolue et k la constante de Boltzmann, et où N et V tendent simultanément vers l'infini, le rapport $N/V = \rho$ étant fixe.

Dans le formalisme grand canonique, on définit la fonction de partition Z associée au volume V, et on obtient la pression par la relation

$$\beta p = \lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \operatorname{Log} Z \qquad (2)$$

Dans les deux cas, des règles analogues permettent d'obtenir les fonctions de corrélation.

Il convient toutefois de remarquer que l'existence d'un volume fini peut jouer un rôle important physiquement, au moins dans un système où coexistent plusieurs phases. Ceci apparaît en particulier dans les phénomènes de capillarité, qui dépendent de la forme de la région offerte au système. Enfermer le système dans un volume donné revient à soumettre les particules à un potentiel représenté par un puits infini. Dans le même ordre d'idées, on s'attend à ce que la présence d'un champ extérieur influe de façon importante sur le comportement macroscopique d'un système, au moins s'il se compose de plusieurs phases. Par exemple, le champ de gravitation sépare des phases de densité différente. En particulier, si on décrit un système à plusieurs phases par ses fonctions de corrélation, on s'attend pour celles-ci, en l'absence de champ extérieur, à une structure assez compliquée qui représente une moyenne ou une superposition des différentes phases possibles (Cf. 24).

Dans la présente étude, où on s'intéresse davantage à l'obtention de résultats rigoureux qu'à la description détaillée des phénomènes, on adopte le premier point de vue, qui conduit aux équations (1) et (2). On est alors naturellement conduit à un certain nombre de problèmes, et en particulier les suivants :

1 - On peut se demander si les différents formalismes sont équivalents, par exemple s'ils fournissent pour une assemblée de molécules en équilibre la même équation d'état. Des considérations heuristiques suggèrent qu'il en est bien ainsi, mais il existe peu de résultats rigoureux sur ce point.

2 - On fait choix d'un formalisme, et on accepte les définitions correspondantes des variables thermodynamiques. Dans ces conditions, ces définitions ont-elles un sens ? Si tel est le cas, quelles sont les propriétés des quantités ainsi définies ? Reproduisent-elles les phénomènes expérimentaux, et en particulier les transitions de phase ? Pour poser le problème autrement, quelles conditions doivent satisfaire les données microscopiques pour que la réponse à ces questions soit affirmative ? On peut aborder ces problèmes de façon rigoureuse par deux méthodes différentes : on peut construire des modèles simples exactement solubles et effectuer toutes les constructions explicitement ; on peut aussi essayer de démontrer des résultats généraux avec des hypothèses aussi faibles que possible.

En mécanique classique, des résultats importants se rattachant à ce dernier point de vue ont été obtenus par Van Hove [2], Lee et Yang [3] et plus récemment par Groeneveld [4], Penrose [5], Lebowitz et Penrose [6], et Ruelle [7,8,9]. Ces résultats portent essentiellement sur les deux points suivants :

a) L'existence de la limite du volume infini dans la définition de l'énergie libre et de la pression (dans l'ensemble canonique et l'ensemble grand canonique respectivement) pour toutes les valeurs physiques des paramètres (la densité et l'activité du système respectivement) et les propriétés de monotonie et de convexité des fonctions ainsi définies. Les progrès ont porté essentiellement sur l'affaiblissement des restrictions imposées aux interactions. Par exemple, Lee et Yang [3] supposent la présence d'un coeur dur répulsif et une interaction de portée finie : Ruelle [7] se contente d'hypothèses plus faibles.

b) La convergence du développement de la pression et de la densité en série de l'activité z du système (séries de Mayer) ou de la pression en série de la densité (série du viriel). Lee et Yang ont montré en effet que l'analyticité de la pression et de la densité comme fonctions de z, prise comme variable complexe, était étroitement liée à l'existence des transitions de phase. Le premier pas dans l'étude de cette analyticité est l'étude de la convergence des développements en série de z au voisinage de l'origine.

C'est ainsi que Groeneveld [4] et Penrose [5] ont donné des bornes supérieures et inférieures des rayons de convergence des séries de Mayer et des séries qui définissent les fonctions de corrélation. Ruelle [8,9] a étudié plus systématiquement les fonctions de corrélation en s'intéressant simultanément a l'existence de la limite du volume infini pour z complexe, et à la convergence des développements en série de z. Sa méthode repose sur l'utilisation d'une famille d'équations intégrales, qui ne sont autres que les équations de Kirkwood-Salzburg [10], et qui relient entre elles les fonctions de corrélation. Il considère la famille de ces fonctions ρ comme un vecteur dans un espace de Banach convenable, et la famille de ces équations comme une équation linéaire dans cet espace, du type

$$\rho = \zeta + K\rho \qquad (3)$$

où ζ est un vecteur fixe et K un opérateur linéaire qui dépend analytiquement de z. Il montre ensuite qu'avec des hypothèses convènables sur le potentiel d'interaction, K est un opérateur borné dans cet espace, de norme inférieure à 1 pour $|z|$ assez petit. Ceci permet, en utilisant le développement de Liouville-Neuman de montrer que (3) définit ρ de façon unique comme fonction analytique de z au voisinage de l'origine. D'autre part, la dépendance de K par rapport au volume, dans cette équation, est assez simple pour permettre d'établir l'existence de la limite du volume infini pour les fonctions de corrélation. Enfin, les fonctions de corrélation satisfont une propriété de factorisation [9]. Plus précisément, la fonction de corrélation de (p+q) particules, quand on sépare celles-ci en un groupe de p et un groupe de q et qu'on fait tendre vers l'infini la distance entre les deux groupes, tend en un certain sens vers le produit des fonctions de corrélation des deux groupes de p et q particules.

En mécanique quantique, les résultats rigoureux sont beaucoup moins nombreux. Les théories les plus répandues reposent sur des développements en perturbations dont la convergence n'est pas prouvée, et qui se prêtent donc peu à une étude analogue.

Ruelle [11] a néanmoins pu étendre au cas quantique un certain nombre de résultats de mécanique classique, et en particulier établir pour certaines classes de potentiels l'existence des limites (1) et (2) pour les valeurs physiques des paramètres, et certaines propriétés de monotonie et de convexité des fonctions F et p ainsi définies.

L'objet de la présente étude est d'étendre au cas quantique les résultats obtenus par Ruelle pour les fonctions de corrélation des gaz classiques, et décrits plus haut. Le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique comporte deux difficultés essentielles, relativement indépendantes l'une de l'autre :

- La première est le remplacement de fonctions scalaires par des opérateurs. En particulier, la fonction de distribution de n particules $\exp\left[-\beta H_n (p,q)\right]$ est remplacée par un opérateur à partir duquel on construit la matrice densité du système. Les fonctions de corrélation, obtenues en intégrant les fonctions de distribution sur une partie des variables, sont remplacées par les matrices densités réduites, obtenues en prenant des traces partielles sur les composantes de la matrice densité. Les matrices densités réduites, qu'on notera MDR par la suite, sont le principal objet de cette étude. On devra considérer des opérateurs du type $\exp(-\beta H)$, où l'énergie cinétique apparaitra essentiellement sous forme de l'opérateur $\exp(\beta\Delta)$, Δ étant le laplacien dans un espace de dimension convenable. Cet opérateur transforme une fonction d'onde arbitraire ϕ (indépendante de β) en une fonction $\psi = \exp(\beta\Delta)\,\phi$ qui satisfait l'équation de Bloch : $(\partial/\partial\beta - \Delta)\,\psi = 0$. L'outil mathématique approprié à l'étude de cette équation est l'intégrale de Wiener. Elle fournira une représentation commode de l'opérateur $\exp(-\beta H)$ et permettra, dans une large mesure, d'étendre au cas quantique les méthodes des références [8] et [9].

- La deuxième difficulté est l'introduction des statistiques quantiques. La première en est indépendante. En particulier, il est intéressant de considérer le cas intermédiaire de particules obéissant aux lois de la mécanique quantique, mais satisfaisant la statistique de Boltzmann. L'étude de ce cas,

où la première difficulté apparaît seule, permet de mieux séparer le rôle de l'une et de l'autre dans le problème quantique complet. On notera (SB) et (SQ) les cas de systèmes satisfaisant respectivement la statistique de Boltzmann et les statistiques quantiques. Dans le cas (SQ), on considérera simultanément la statistique de Bose-Einstein et celle de Fermi-Dirac.

Le plan de cette étude est le suivant. Dans un chapitre préliminaire (chapitre I), on précise les restrictions imposées à l'interaction des particules (Sec.1), on rappelle la définition et quelques propriétés de l'intégrale de Wiener (Sec.2), et on définit, dans le formalisme grand canonique qui est seul utilisé par la suite, les MDR d'un système de particules de volume fini en équilibre thermodynamique. On montre que les MDR admettent une représentation sous forme d'intégrale de Wiener de certaines fonctionnelles ρ_Λ(Sec.3). On étend ensuite au cas quantique (chapitre II) le formalisme algébrique introduit par Ruelle en mécanique classique [9], et qui semble fournir le cadre le mieux adapté au problème présent. On montre (chapitre III) que les fonctionnelles ρ satisfont une famille d'équations intégrales qu'on peut interpréter comme une équation linéaire dans un espace de Banach convenable. Pour $|z|$ assez petit (z étant l'activité du système, étendue à des valeurs complexes), cette équation définit les MDR de façon unique, fournit des majorations de celles-ci, et permet de montrer leur analyticité en z. Ces résultats valent indépendamment du volume du système. Il est alors possible de montrer (chapitre IV) que les MDR à volume fini tendent en un certain sens vers des limites bien définies quand le volume du système augmente indéfiniment, et pour des valeurs assez faibles de $|z|$. On en déduit que la série de Mayer et la série du viriel convergent au voisinage de l'origine. Utilisant plus directement le formalisme algébrique du chapitre II, on améliore ensuite (chapitre V) les majorations du chapitre III, et on établit pour les MDR une propriété de factorisation. On montre enfin que les MDR satisfont certaines propriétés de positivité (chapitre VI) qui permettent de les utiliser pour construire une représentation non triviale des règles de commutation ou d'anticommutation canoniques, et de préciser

ainsi le lien entre ce qui précède et la théorie quantique des champs. Un appendice de caractère technique est consacré à la démonstration de certains résultats utilisés dans les chapitres III à V.

Les équations, lemmes, etc., sont numérotés par section. Une équation est désignée par son numéro dans sa section, précédé du numéro de sa section, et précédé du numéro du chapitre où elle figure si et seulement si la citation se trouve dans un chapitre différent. Par exemple, l'équation 10 de la section 1 du chapitre III est désignée (1-10) dans le chapitre III, et (III-1-10) partout ailleurs.

I - PRELIMINAIRES

Ce chapitre, hétérogène, contient un certain nombre de définitions et de résultats en général bien connus, et qui seront le point de départ de cette étude. La section 1 rassemble pour référence ultérieure les conditions qu'on sera amené à imposer sur l'interaction des particules. La section 2 rappelle ou établit la définition et quelques propriétés de l'intégrale de Wiener. L'exposé suit de près la référence[12]. La section 3 définit les MDR d'abord de façon relativement générale, puis dans le cas particulier d'un gaz en équilibre thermodynamique enfermé dans une région bornée, et donne dans ce dernier cas leur représentation sous forme d'intégrales de Wiener. Les résultats essentiels sont les formules (3-26), (3-27) et (3-28) dans le cas (SB), et les formules (3-40), (3-47), (3-48) dans le cas (SQ). Elles contiennent toute l'information utilisée par la suite sur les MDR, et seront prises comme définitions de celles-ci à partir du chapitre suivant.

1 - CONDITIONS SUR LE POTENTIEL

On considère un système de particules identiques dans l'espace euclidien à ν dimensions ($\nu \geq 1$) interagissant par un potentiel à deux corps ϕ satisfaisant un certain nombre de conditions choisies parmi les suivantes :

(A) ϕ est une fonction réelle qui ne dépend que de la différence $(x - y)$ des positions x et y des deux particules considérées, et est une fonction symétrique de ces deux variables, c'est-à-dire une fonction paire de $x - y$. On n'impose pas à ϕ d'être à symétrie sphérique.

(B) ϕ est continue sur le complémentaire d'un ensemble fermé F de capacité nulle. L'exclusion d'un ensemble de capacité nulle [13] est liée à l'utilisation de l'intégrale de Wiener. On verra dans la section 2 que la mesure de Wiener des trajectoires qui rencontrent un tel ensemble est nulle, ce qui permettra d'opérer comme si ϕ était continue partout. Par ailleurs, cette condition autorise une singularité de ϕ à l'origine, qui peut avoir un intérêt physique.

(B') $\phi(x) = +\infty$ pour $|x| \leq a$, (c'est-à-dire : ϕ a un coeur dur sphérique de rayon a) et $\phi(x)$ est continue, pour $|x|>a$, sur le complémentaire d'un ensemble fermé F de capacité nulle. L'ensemble F n'introduit toujours aucune complication ; son intérêt physique est ici très réduit.

Il est probable que la plupart des résultats ultérieurs pourrait être étendue, au prix de complications mathématiques sérieuses, à des classes de potentiels beaucoup plus vastes, en abandonnant la continuité et en imposant seulement à ϕ d'être, par exemple, mesurable. Une telle extension est physiquement sans grand intérêt.

D'autre part, il n'est pas essentiel que le coeur dur soit sphérique. Cette hypothèse est introduite pour des raisons de commodité.

(C) Cette condition se décompose en deux

1 . ϕ est absolument intégrale dans tout l'espace s'il n'y a pas de coeur dur, et à l'extérieur du coeur s'il y en a un.

$$\int_{|x|\geq a} |\phi(x)|\, dx < +\infty \qquad (1\text{-}1)$$

2 . Il existe $b \geq 0$, $\eta \geq 0$ tels que la fonction $\phi_\eta(x)$ définie par

$$\begin{cases} \phi_\eta(x) = \operatorname{Sup}_{|h| \leq \eta} |\phi(x+h)| & \text{si } |x| \geq b \\ \phi_\eta(x) = 0 & \text{si } |x| < b \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

soit intégrable dans tout l'espace.

La première partie de la condition (C) impose des restrictions sur la croissance de ϕ au voisinage du coeur et de F, et sur la décroissance de ϕ à l'infini. On verra a la fin de cette étude que tous les résultats s'étendent facilement au cas où on impose seulement à ϕ d'être intégrable en dehors d'un domaine borné. Le point important ici est la décroissance de ϕ à l'infini. Cette condition affaiblie est satisfaite en particulier par tout potentiel en $1/r^n$, où $n \geq \nu + \varepsilon$, $r = |x|$. Elle est donc satisfaite, pour $\nu = 3$, par le potentiel de Lennard-Jones ($n = 6$), mais non par le potentiel de Coulomb ($n = 1$).

La deuxième partie de la condition (C) renforce légèrement la première en dehors d'un domaine borné. Elle n'est pas très restrictive physiquement. Elle est satisfaite en particulier par tout potentiel qui satisfait la première partie de (C) et est fonction monotone de $r = |x|$ en dehors d'un domaine borné.

(D) Il existe une constante $B \geq 0$ telle que pour tout système de points distincts $x_i \in R^\nu$, $i = 1,\ldots,n$,

$$\sum_{i<j} \phi(x_i - x_j) \geq - nB \qquad (1\text{-}3)$$

Cette condition entraîne en particulier que ϕ est bornée inférieurement par $-2B$. On peut obtenir de meilleures bornes sur ϕ si ϕ est à symétrie sphérique [9].

La condition (D) signifie, physiquement, que l'énergie potentielle par particule d'un système de n particules est bornée inférieurement indépendamment de n. Elle est satisfaite, par exemple, par les fonctions ϕ positives, et par les fonctions de type positif [9].

(E) Le potentiel est purement répulsif : $\phi(x) \geq 0$

La condition (E) entraîne (D) avec $B = 0$

(F) (Cette condition ne peut être imposée qu'en même temps que (B'), car elle nécessite un coeur dur). Il existe une constante réelle positive B telle que, pour toute suite finie $x_i \in R^\nu$, $i = 0,1,\ldots,n$, telle que $|x_i - x_j| \geq a$ pour tout couple (i, j), on ait

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(x_o - x_i) \geq -2B \qquad (1\text{-}4)$$

Une condition suffisante pour assurer (F) est que pour $|x| \geq a$, $\phi(x)$ soit bornée inférieurement par une fonction négative non décroissante de $|x|$ qui soit une fonction intégrable de x. Si (C) est satisfaite, (F) l'est aussi s'il existe $b \geq a$ tel que $\phi(x)$ soit bornée inférieurement pour $|x| \leq b$ et soit une fonction monotone de $|x|$ pour $|x| \geq b$.

La condition (F) entraîne la propriété suivante :

(G) Soit X^α ($\alpha=1,\ldots,m$) m familles de j_α points : $X^\alpha = (x_1^\alpha,\ldots,x_{j_\alpha}^\alpha)$, telles que pour tout $(\alpha,i) \neq (\beta,j)$, on ait $|x_i^\alpha - x_j^\beta| \geq a$. Alors :

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{1\leq i<j\leq j_\alpha} \phi(x_i^\alpha - x_j^\alpha) + 2 \sum_{\alpha<\beta} \sum_{i\leq j_\alpha} \sum_{j\leq j_\beta} \phi(x_i^\alpha - x_j^\beta) \geq -2qB \qquad (1\text{-}5)$$

où $q = \sum_{\alpha=1}^{m} j_\alpha$

La condition (G) sera utilisée sous cette forme dans la section (III-2). D'autre part, il est possible d'imposer séparément (F) sous la forme (1-4) et (G) sous la forme (1-5), mais avec une constante B' pouvant être inférieure à B. Les modifications qu'il faudrait apporter aux démonstrations qui vont suivre sont évidentes, et l'amélioration des résultats négligeable. Par suite, lorsqu'on imposera la condition (F), on utilisera (1-4) et (1-5) avec la même constante B au second membre.

Si dans (G) tous les j_α sont égaux à 1, (1-5) se réduit à (1-3). Par suite, (G) implique (D), donc (F) implique (D). Ceci permet, en présence d'un coeur dur, d'exhiber une classe assez vaste de potentiels non triviaux, c'est-à-dire en l'occurence non purement répulsifs, qui satisfont la condition (D).

On imposera les conditions (A) à (F) dans les combinaisons suivantes :

- Dans le cas (SB) : (A), (B) ou (B'), et (D), dans la section (II-1). (A) (B) (C) (D), ou (A) (B') (C) (D) dans les sections (III-1) et (V-1).
- Dans le cas (SQ) : (A), (B) ou (B'), et (D) dans la section (II-2). (A) (B) (C) (E), ou (A) (B') (C) (F) dans les sections (III-2) et (V-2).

2 - INTEGRALE DE WIENER

Définition de l'intégrale de Wiener conditionnelle

On note x, y, u, v, etc. des points de l'espace euclidien à ℓ dimensions R^ℓ. On note $\dot{R}^\ell$ le compactifié par un point de R^ℓ (14). On pose :

$$\psi_\beta (x - y) = (\pi\beta)^{-\ell/2} \exp(-|x - y|^2/\beta) \qquad (2\text{-}1)$$

où β est une constante réelle strictement positive, et $|x - y|^2$ le carré de la distance euclidienne. On appelle trajectoire une fonction ω définie dans l'intervalle $[0,\beta]$ et à valeurs dans $\dot{R}^\ell$. L'ensemble des trajectoires est donc le produit cartésien :

$$\Omega = \prod_{0\leq t\leq\beta} \dot{R}^\ell \qquad (2\text{-}2)$$

On munit cet espace de la topologie produit, qui n'est autre que la topologie de la convergence simple pour les fonctions ω, et qu'on appellera pour abréger topologie simple. D'après le théorème de Tychonoff [14], Ω est compact. On définit maintenant l'intégrale de Wiener conditionnelle des fonctions numériques définies dans Ω. On considère d'abord la classe $\mathcal{C}_o(\Omega)$ des fonctions f définies de la façon suivante :

Soit $0 < t_1 < \ldots < t_n < \beta$ une suite croissante finie de valeurs de t, et $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction continue de n points $x_i \in R^{\ell}$. F est continue sur un compact, donc bornée. On définit alors la fonction f dans Ω par :

$$f(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)) \tag{2-3}$$

f est continue au sens de la topologie simple dans Ω.

Soit x et y deux points fixes de R^{ℓ}. Pour toute $f \in \mathcal{C}_o(\Omega)$, on définit l'intégrale de Wiener conditionnelle de f associée aux points x et y, $P_{xy}(f)$, par :

$$P_{xy}(f) = \int dx_1 \ldots dx_n \; \psi_{t_1}(x_1 - x)\, \psi_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \ldots \psi_{\beta - t_n}(y - x_n) \times$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2-4}$$

F étant bornée, cette intégrale existe. Elle admet la majoration :

$$P_{xy}(f) \leq \psi_{\beta}(x - y) \cdot \operatorname{Sup} |f| \tag{2-5}$$

L'application $f \to P_{xy}(f)$ possède les propriétés suivantes :

- P_{xy} est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_o(\Omega)$, partout définie.
- P_{xy} est positive : si $f \geq 0$, alors $P_{xy}(f) \geq 0$ (2-6)

- P_{xy} est continue dans $\mathcal{C}_o(\Omega)$ au sens de la topologie induite par la norme uniforme :

$$\| f \| = \text{Sup} \, |f| \tag{2-7}$$

Soit maintenant $\mathcal{C}(\Omega)$ la classe des fonctions continues définies dans Ω. $\mathcal{C}(\Omega)$ muni de la norme uniforme (2-6) est un espace normé. C'est même un espace de Banach. Il résulte du théorème de Stone-Weierstrass [14] que $\mathcal{C}(\Omega)$ est la fermeture uniforme de $\mathcal{C}_o(\Omega)$, ou en d'autres termes, que $\mathcal{C}_o(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{C}(\Omega)$. On voit alors facilement qu'il existe une extension de P_{xy} à $\mathcal{C}(\Omega)$ qui est définie de façon unique si on lui impose d'être soit continue, soit positive. La forme linéaire ainsi étendue satisfait (2-5) et (2-6). De (2-5) et du fait que Ω est compact, il résulte que si $f_n \downarrow 0$, alors $P_{xy}(f_n) \downarrow 0$. Il en résulte que P_{xy} admet une représentation de Riesz [15], c'est-à-dire qu'il existe une mesure régulière dans Ω, qu'on note encore P_{xy}, telle que pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega)$,

$$P_{xy}(f) = \int_{\Omega} P_{xy} \, (d\omega) \, f \, (\omega) \tag{2-8}$$

La mesure ainsi obtenue est la mesure de Wiener (conditionnelle). On note qu'elle dépend du couple (x,y) choisi, et de la constante β. Celle-ci sera indiquée par un indice supérieur (P^{β}_{xy}) quand il y aura lieu de le préciser.

Continuité des trajectoires

On montre maintenant que la mesure P_{xy} est concentrée sur les trajectoires continues à valeurs dans R^{ℓ} et telles que $\omega(0) = x, \omega(\beta) = y$. On note :

$$\sigma(\varepsilon,\delta) = \underset{t \leq \delta}{\text{Sup}} \int_{|y-x|>\varepsilon} \psi_t(x - y) \, dy \tag{2-9}$$

$$\sigma(\varepsilon,\delta) = \pi^{-\ell/2} \int_{|u|>(\varepsilon/\sqrt{\delta})} e^{-u^2}\, du^{\ell} \qquad (2\text{-}10)$$

$\sigma(\varepsilon,\delta)$ est une fonction de ε^2/δ et tend vers zéro plus vite que toute puissance de (ε^2/δ) quand (ε^2/δ) tend vers l'infini. Plus précisément

$$\sigma(\varepsilon,\delta) \leq \exp(-\varepsilon^2/\delta) \times \text{Polynôme en } (\varepsilon^2/\delta) \qquad (2\text{-}11)$$

D'autre part, $\sigma(\varepsilon,\delta)$est majoré par 1 uniformément en ε et δ.

Théorème (2-1). La mesure P_{xy} est concentrée sur les trajectoires continues à valeurs dans R^{ℓ}.

Le théorème résulte de quelques lemmes.

Lemme (2-1). Soit $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, et $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq \gamma < \beta$ avec $t_n - t_1 < \delta$
Soit :

$$A = \left\{ \omega : \text{il existe } j \ (1 \leq j \leq n) \text{ tel que } |\omega(t_1) - \omega(t_j)| > \varepsilon \right\} \qquad (2\text{-}12)$$

$$\text{Alors } P_{xy}(A) \leq 2 \left[\pi\ (\beta - \gamma)\right]^{-\ell/2}\ \sigma(\varepsilon/2,\delta) \qquad (2\text{-}13)$$

Démonstration. La démonstration est la même que dans [12], à la seule différence près que la mesure des divers ensembles considérés contient un facteur supplémentaire $\psi_{\beta-t}\ (y-u)$, où u est la dernière variable d'intégration. Ce facteur est majoré uniformément en u par $\psi_{\beta-t}\ (0) \leq \left[\pi(\beta-\gamma)\right]^{-\ell/2}$, car toutes les valeurs de t qui interviennent appartiennent à l'intervalle $\left[0,\gamma\right]$.

Lemme (2-2). Les hypothèses étant celles du lemme (2-1) et E étant défini par

$$E = \left\{ \omega : \text{il existe } j \text{ et } k \ (1 \leq j, k \leq n) \text{ tels que } |\omega_j(t) - \omega_k(t)| > 2\varepsilon \right\} \tag{2-14}$$

$$\text{Alors } P_{xy}(E) \leq 2 \left[\pi(\beta-\gamma)\right]^{-\ell/2} \sigma(\varepsilon/2, \delta) \tag{2-15}$$

Le lemme (2-2) est une conséquence immédiate du lemme (2-1).

Lemme (2-3). Soit $0 \leq a < b \leq \gamma$ avec $(b - a) \leq \delta$. Soit

$$E(a, b, \varepsilon) = \left\{ \omega : \text{il existe } t, s, \ (a \leq t, s \leq b) \text{ tels que } |\omega(t) - \omega(s)| > 2\varepsilon \right\} \tag{2-16}$$

$$\text{Alors } P_{xy}\left(E(a, b, \varepsilon)\right) \leq 2 \left[\pi(\beta-\gamma)\right]^{-\ell/2} \sigma(\varepsilon/2, \delta) \tag{2-17}$$

La démonstration est la même que dans [12].
Les propriétés intéressantes apparaîtront quand on fera tendre δ vers zéro.
On suppose pour éviter des complications triviales, que γ/δ est entier.

Lemme (2-4). Soit

$$F(\gamma, \varepsilon, \delta) = \left\{ \omega : \text{il existe } t \text{ et } s \ (0 \leq t, s \leq \gamma \text{ et } |t - s| \leq \delta) \text{ tels que } |\omega(t) - \omega(s)| > \varepsilon \right\} \tag{2-18}$$

$$\text{Alors } P_{xy}\left(F(\gamma, \varepsilon, \delta)\right) \leq 2 \ (\gamma/\delta) \left[\pi(\beta-\gamma)\right]^{-\ell/2} \sigma(\varepsilon/4, \delta) \tag{2-19}$$

La démonstration est la même que dans [12]
La définition de la mesure P_{xy} est invariante par échange de x et y, et changement simultané du sens des trajectoires. On en déduit :

Lemme (2-5). Soit $0 < \gamma' \leq \gamma$. Soit

$$G(\gamma', \varepsilon, \delta) = \Big\{ \omega : \text{il existe t et s } (\gamma' \leq t,\ s \leq \beta \text{ et } |t - s| \leq \delta) \text{ tels que } |\omega(t) - \omega(s)| > \varepsilon \Big\} \qquad (2\text{-}20)$$

$$\text{Alors } P_{xy}\ (G(\gamma', \varepsilon, \delta)) \leq 2\ ((\beta-\gamma')/\delta)\ (\pi\gamma')^{-\ell/2}\ \sigma(\varepsilon/4,\delta) \qquad (2\text{-}21)$$

On définit maintenant $K'(\varepsilon,\delta) = F(\gamma,\varepsilon,\delta) \cup G(\gamma'\varepsilon,\delta)$, ou plus précisément :

$$K'(\varepsilon,\delta) = \Big\{ \omega : \text{il existe t et s } (0 \leq t,\ s \leq \beta \text{ et } |t - s| \leq \delta) \text{ tels que } |\omega(t) - \omega(s)| > \varepsilon \Big\} \qquad (2\text{-}22)$$

Le complémentaire de $K'(\varepsilon,\delta)$ dans Ω est défini par

$$K(\varepsilon,\delta) = \Big\{ \omega : |t - s| \leq \delta \text{ entraîne } |\omega(t) - \omega(s)| \leq \varepsilon \Big\} \qquad (2\text{-}23)$$

En combinant les lemmes (2-4) et (2-5) pour $\gamma = \gamma' = \beta/2$, on obtient

Lemme (2-6). $P_{xy}(K'(\varepsilon,\delta)) \leq c(\pi\beta)^{-\ell/2}\ (\beta/\delta)\ \ \sigma(\varepsilon/4,\delta)$ (2-24)

avec $c = 2^{\ell/2+1}$

On vérifie facilement que la relation (2-24) est encore valable (à des facteurs 2 près qui sont sans importance pour les applications) pour toute valeur de δ, et en particulier pour $\delta = \beta$.

On démontre maintenant le théorème (2-1). Soit $\mathcal{G} \subset \Omega$ l'ensemble des trajectoires continues à valeurs dans R^{ℓ}, et soit $\mathcal{G}'$ le complémentaire de $\mathcal{G}$ dans Ω. On a donc :

$$\mathcal{G}' = \bigcup_{\varepsilon} \bigcap_{\delta} K'(\varepsilon,\delta) \qquad (2\text{-}25)$$

Il résulte du lemme (2-6) que $P_{xy}(\mathcal{S}') = 0$. Le théorème est donc démontré. On montre de façon analogue que la mesure P_{xy} est concentrée sur les trajectoires qui satisfont $\omega(o) = x$, $\omega(\beta) = y$. En particulier, les mesures P_{xy} qui correspondent à des couples (x,y) différents ont des supports disjoints.

Il résulte du théorème (2-1) que $\mathcal{S}$ est mesurable et que $P_{xy}(\mathcal{S}) = P_{xy}(\Omega) = \psi_\beta(x - y)$. La mesure totale de l'espace est finie, par conséquent toute fonction mesurable bornée est intégrable.

On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{S}_\Lambda \subset \mathcal{S}$ des trajectoires continues qui restent dans un ouvert donné $\Lambda \subset R^\ell$:

$$\mathcal{S}_\Lambda = \left\{ \omega : \omega \in \mathcal{S} \text{ et } \omega(t) \in \Lambda \text{ pour tout } t \in [0,\beta] \right\} \qquad (2\text{-}26)$$

Lemme (2-7). $\mathcal{S}_\Lambda$ est mesurable.

Soit en effet $\Lambda_t = \left\{ \omega \ : \ \omega(t) \in \Lambda \right\}$ (2-27)

On a donc $\mathcal{S}_\Lambda = \mathcal{S} \cap \left(\bigcap_{o \leq t \leq \beta} \Lambda_t \right)$ (2-28)

Soit $\mathcal{D}$ un sous ensemble dénombrable dense de $[0,\beta]$. Les trajectoires de $\mathcal{S}$ étant continues, on a :

$$\mathcal{S}_\Lambda = \mathcal{S} \cap \left(\bigcap_{t \in \mathcal{D}} \Lambda_t \right) \qquad (2\text{-}29)$$

Λ_t est ouvert dans Ω, donc mesurable. $\mathcal{S}_\Lambda$ est donc intersection dénombrable d'ensembles mesurables, donc est mesurable.

Quelques ensembles de mesure nulle

On étudie maintenant au point de vue de la P_{xy}-mesure certains sous ensembles de $\mathcal{S}$ qui seront utiles pour la suite. On montre d'abord que l'ensemble des trajectoires qui rencontrent un ensemble de capacité newtonienne nulle [13] est de mesure nulle.

Théorème (2-2). Soit $F \subset R^{\ell}$ un ensemble fermé de capacité nulle, et soit $x \notin F$, $y \notin F$. Alors

$$P_{xy}\left|\left\{\omega : \exists\, t \in [0,\beta] \text{ tel que } \omega(t) \in F\right\}\right| = 0 \qquad (2\text{-}30)$$

Démonstration. Cette propriété résulte immédiatement de la propriété correspondante de l'intégrale de Wiener usuelle [12]. Soit en effet, pour tout couple (γ_1, γ_2) $(0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \beta)$

$$H(\gamma_1, \gamma_2) = \left\{\omega : \exists\, t \in [\gamma_1, \gamma_2] \text{ tel que } \omega(t) \in F\right\} \qquad (2\text{-}31)$$

Soit $0 < \gamma' < \gamma < \beta$. Alors

$$H(0,\beta) \subset H(0,\gamma) \cup H(\gamma',\beta) \qquad (2\text{-}32)$$

Donc $P_{xy}(H(0,\beta)) \leq \left[\pi(\beta-\gamma)\right]^{-\ell/2} \int P_{xu}^{\gamma}(H(0,\gamma))du +$

$$(\pi\gamma')^{-\ell/2} \int P_{uy}^{\beta-\gamma'}(H(\gamma',\beta))\, du = 0 \qquad (2\text{-}33)$$

par application du théorème 5 de la référence [12].

Soit maintenant $x \in R^{\ell}$. On ne restreint pas la généralité en le prenant pour origine 0. Soit σ un élément de surface de dimension $(\ell - 1)$, de classe C^1, contenant 0 et défini au voisinage de 0. Soit $y \notin \sigma$. On dira qu'une trajectoire continue ω traverse σ à l'instant t si $\omega(t) \in \sigma$ et si, pour tout $\delta > 0$, il existe t_1 et t_2 $(t - \delta \leq t_1 < t < t_2 \leq t + \delta)$ tels que $\omega(t_1)$ et $\omega(t_2)$ soient strictement de part et d'autre de σ. Cette dernière expression a un sens pour δ assez petit. On dira que ω traverse σ s'il existe $t \in [0,\beta]$ tel que ω traverse σ à l'instant t.

Lemme (2-8). Soit $V \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des trajectoires telles que $\omega(0) = x$, $\omega(\beta) = y$, qui ne traversent pas σ, et qui restent d'un même côté (donné) de σ au voisinage de $t = 0$. Alors $P_{xy}(V) = 0$

Démonstration. On décompose tout vecteur $u \in R^{\ell}$ en une composante $u_{\parallel}$ portée par la normale N a σ en 0 et une composante $u_{\perp}$ perpendiculaire à celle-ci. Soit $0 \leq \gamma \leq \beta$, et soit $r \geq 0$ tel que le cylindre de révolution de rayon r, d'axe N soit coupé en deux par σ. Alors $V \subset V_1 \cup V_2$, où :

$$V_1 = \left\{ \omega : \omega \in \mathcal{S},\ \omega(0) = 0,\ \text{et } \exists\ t \in [0,\gamma] \text{ tel que } \omega_{\perp}(t) > r \right\} \qquad (2\text{-}34)$$

$$V_2 = \left\{ \omega : \omega \in \mathcal{S},\ \omega(0) = 0 \text{ et } \exists\ \varepsilon(r) \geq 0 \text{ tel que } \forall\ t \in [0,\gamma], \omega_{\parallel}(t) > -\varepsilon(r) \right\} \qquad (2\text{-}35)$$

La normale N est orientée positivement du côté où partent les trajectoires de V. σ est de classe C^1, donc on peut choisir $\varepsilon(r)$ tel que $\varepsilon(r)/r$ tende vers zéro quand r tend vers zéro. Mais $V_1 \subset K'(r,\gamma)$, où $K'(r,\gamma)$ est défini par (2-22). Il résulte du lemme (2-6) que $P_{0y}(V_1)$ tend vers zéro quand r^2/γ tend vers zéro. D'autre part, on voit facilement qu'à une dimension, la P_{0u}^{γ}- mesure de l'ensemble des trajectoires qui restent a droite de $-\varepsilon$ est

$$(\pi\gamma)^{-1/2} \left\{ \exp(-u^2/\gamma) - \exp(-(u+2\varepsilon)^2/\gamma) \right\} \qquad (2\text{-}36)$$

Par suite

$$P_{xy}(V_2) \leq (\pi\beta)^{-(\ell-1)/2} (\pi(\beta-\gamma))^{-1/2} (\pi\gamma)^{-1/2}$$

$$\int_{u \geq -\varepsilon} du \left[\exp(-(u^2/\gamma)) - \exp(-(u+2\varepsilon)^2/\gamma) \right] \qquad (2\text{-}37)$$

$$\leq (\pi\beta)^{-(\ell-1)/2} (\pi(\beta-\gamma))^{-1/2} \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} dv \exp\left(-v^2 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\right) 2 \operatorname{sh}\left(2v\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) \qquad (2\text{-}38)$$

L'intégrale converge uniformément par rapport à ε et γ pour ε^2/γ borné, et tend vers zéro si ε^2/γ tend vers zéro. On choisit alors $\gamma = r\varepsilon$, et on fait tendre r vers zéro. $r^2/\gamma = r/\varepsilon$ tend vers l'infini, tandis que $\varepsilon^2/\gamma = \varepsilon/r$ tend vers zéro. Donc $P_{xy}(V_1)$ et $P_{xy}(V_2)$ tendent vers zéro. Le lemme est démontré.

Soit maintenant σ une surface de classe C^2, fermée dans R^ℓ, et soient x,y deux points situés à l'intérieur du complémentaire de σ, et dans une même composante connexe de celui-ci (intuitivement : situés du même côté de de σ).

Lemme (2-9). Soit $W \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des trajectoires continues qui rencontrent σ sans la traverser. Alors $P_{xy}(W) = 0$

Démonstration. La démonstration est assez longue, et on donne seulement le principe. On peut se restreindre aux ω tels que $\omega(0) = x$, $\omega(\beta) = y$. Grâce au lemme (2-6), on peut se restreindre à une région bornée de R^ℓ, et par suite au cas où σ est un compact dans R^ℓ. Comme dans le cas du théorème (2-2), on déduit le résultat relatif à la mesure de Wiener conditionnelle P_{xy} de celui relatif à la mesure de Wiener ordinaire. On commence donc par ce dernier cas. On peut, au voisinage de chaque point de σ, définir un $\varepsilon(r)$ analogue à celui du lemme précédent et tel que $\varepsilon(r)/r$ tende vers zéro quand r tend vers zéro uniformément sur σ. Soit alors $\varepsilon > 0$, et χ la fonction caractéristique de l'ensemble des points dont la distance à σ est inférieure à ε. Soit $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq \beta$. Soit W_n l'ensemble des trajectoires qui ne traversent pas σ, mais telles que la distance de $\omega(t_j)$ à σ soit inférieure à ε pour au moins un j. Soit $\alpha_n(\omega)$ la fonction caractéristique de W_n, et $\chi_p = \chi(\omega(t_p))$. Alors

$$\alpha_n(\omega) = \alpha_o(\omega)\left\{\chi_1 + (1-\chi_1)\chi_2 + \ldots + (1-\chi_1)\ldots(1-\chi_{n-1})\chi_n\right\} \quad (2\text{-}39)$$

On majore $\alpha_o(\omega)$ de façon différente pour chaque terme. Pour le terme se terminant par χ_j, on remplace la condition $\omega \in W_o$ par la condition moins restrictive : ω ne traverse pas σ dans l'intervalle $[t_j, t_j + \gamma]$. On majore l'intégration relative à cet intervalle comme dans le lemme précédent, ce qui introduit dans l'intégrale de chaque terme un même facteur analogue à (2-38). On obtient finalement pour la mesure de W_n une majoration qui tend vers zéro quand ε^2/γ tend vers zéro, r^2/γ tend vers l'infini, et qui ne dépend pas de n. Le résultat pour la mesure de Wiener ordinaire en découle facilement. Le lemme (2-9) s'en déduit par un argument analogue à celui de la démonstration du théorème (2-2).

On aura à considérer par la suite le cas où l'espace R^ℓ est la somme directe de m espaces euclidiens R^ν ; un point de R^ℓ sera une famille de m points de R^ν, et une trajectoire dans R^ℓ une famille de m trajectoires dans R^ν. On notera x_j et ω_j $(1 \leq j \leq m)$ les points et trajectoires de R^ν, et $x^m = (x_1, \ldots, x_m)$ et $\omega^m = (\omega_1, \ldots \omega_m)$ les points et trajectoires de R^ℓ. On notera $\mathcal{S} = S^m$ et $S(= S^1)$ l'espace des trajectoires continues dans R^ℓ et R^ν respectivement.

Pour deux trajectoires $\omega, \omega' \in S$, on définit la trajectoire $\omega - \omega' \in S$ par

$$(\omega - \omega')(t) = \omega(t) - \omega'(t) \qquad (2\text{-}40)$$

Lemme (2-10). Soit $V \subset S$ et $F \subset R^\nu \times R^\nu$. Soit $\tilde{V}$ l'ensemble des trajectoires $\tilde{\omega}$ de longueur (définie comme la longueur de l'intervalle de t) 2β définies à partir des $\omega \in V$ par $\tilde{\omega}(t) = \omega(t/2)$. On suppose que pour tout $(x,y) \notin F$, $P_{xy}^{2\beta}(\tilde{V}) = 0$. Soit

$$\mathcal{V} = \left\{ \omega^m : \omega_i - \omega_j \in V \text{ pour au moins un couple } (i,j) \right\} \qquad (2\text{-}41)$$

$$\mathcal{F} = \left\{ (x^m, y^m) : (x_i - x_j, y_i - y_j) \in F \text{ pour au moins un couple } (i,j) \right\} \qquad (2\text{-}42)$$

Alors $P_{x^m, y^m}(\mathcal{V}) = 0$ pour tout $(x^m, y^m) \notin \mathcal{C}$.

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour m = 2. Soit d'abord f une fonction suffisamment régulière d'une trajectoire $\omega \in S$. Pour toute $\omega \in S$, on appelle ω_n le contour polygonal qui coïncide avec ω aux temps multiples de $\beta/n = \delta$ (et dont chaque segment est parcouru à une vitesse constante). On considère

$$\int P_{xy}(d\omega)\ P_{x'y'}(d\omega')\ f(\omega - \omega')$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int dx_1 \ldots dx_{n-1}\ dx'_1 \ldots dx'_{n-1}\ f(\omega_n - \omega'_n) \prod_{j=1}^{n} \psi_\delta(x_j - x_{j-1})$$

$$\times\ \psi_\delta(x'_j - x'_{j-1}) \qquad (2\text{-}43)$$

où $x_j = \omega(j\beta/n)$; $x'_j = \omega'(j\ \beta/n)$.

Mais $\psi_\delta(x_j - x_{j-1})\ \psi_\delta(x'_j - x'_{j-1}) = \psi_{2\delta}(x_j + x'_j + x_{j-1} + x'_{j-1}) \cdot 2^\nu$

$$\psi_{2\delta}(x_j - x'_j - x_{j-1} + x'_{j-1})$$

Par suite

$$\int P^{\beta}_{x,y}(d\omega)\ P_{x',y'}(d\omega') = 2^\nu\ \psi_{2\beta}(x + x' - y - y') \int P^{2\beta}_{x-x',y-y'}(d\tilde{\omega})\ f(\omega)$$

où $\omega(t) = \tilde{\omega}(2t)$ (2-45)

Cette relation s'étend aux fonctions intégrables, et en particulier à la fonction caractéristique de V. Mais si f est la fonction caractéristique de V, le dernier facteur est $P^{2\beta}_{x-x',y-y'}(\hat{V})$, d'où le résultat.

On introduit enfin une nouvelle topologie dans Ω et dans $\mathcal{S}$ (ou dans S), dont la relation avec la P_{xy} - mesure est moins directe que celle de la topologie simple, mais qui est intuitivement plus naturelle : c'est la topologie de la convergence uniforme, engendrée par la distance

$$\|\omega - \omega'\| = \sup_{t \in [0,\beta]} |\omega(t) - \omega'(t)|$$

Cette topologie est strictement plus fine que la précédente. Pour cette topologie, Ω n'est pas compact. $\mathcal{S}$ est fermé dans Ω. On montre facilement que les fonctions bornées et continues sur $\mathcal{S}$ sont intégrables.

Lemme (2-11). Les trajectoires de $\mathcal{S}$ qui rencontrent un fermé $F \subset R^{\ell}$ forment un ensemble $\mathfrak{F}$ fermé pour la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration. Soit une suite ω_n qui tend vers ω, telle que $\omega_n(t_n) \in F$. Les t_n ont un point d'accumulation t. On suppose pour abréger que t_n tend vers t. Alors

$$|\omega(t) - \omega_n(t_n)| \leq \|\omega - \omega_n\| + |\omega(t) - \omega(t_n)| \qquad (2\text{-}46)$$

Ceci tend vers zéro, car ω est continue. Comme F est fermé, $\omega(t) \in F$, donc ω rencontre F.

Représentation intégrale de exp(- βH)

Soit Λ un ouvert borné connexe dans R^{ℓ}, dont la frontière est de classe C^2. Soit U(x) une fonction réelle, bornée inférieurement par -M, définie dans R^{ℓ}, et continue sauf peut être sur un ensemble fermé F de capacité nulle, et sur la réunion d'un nombre fini de sous ensembles de R^{ℓ} limités par des frontières de classe C^2, où U(x) peut prendre la valeur + ∞, ainsi que sur la frontière de ceux-ci. Physiquement U(x) représente l'énergie potentielle d'un système de particules et les ensembles précédemment exclus correspondent à des singularités isolées du potentiel ou à un coeur dur. Λ représente

la boîte dans laquelle est enfermé le système. On verra plus précisément au Chapitre II, que dans ces conditions, la fonction

$$f(\omega) = \exp\left[-\int_0^\beta U(\omega(t))\, dt\right] \tag{2-47}$$

est P_{xy}- intégrale pour tout $x \notin F$, $y \notin F$, et que l'intégrale

$$\int P_{xy}(d\omega)\, \alpha_\Lambda(\omega)\, f(\omega) \tag{2-48}$$

est une fonction continue de (x,y) pour $x \notin F$, $y \notin F$.

Pour toute $\phi \notin L^2(\Lambda)$, on définit la fonction $T_\beta\, \phi$ par

$$T_\beta\, \phi(x) = \int P_{xy}(d\omega)\, f(\omega)\, \alpha_\Lambda(\omega)\, \phi(y)\, dy \tag{2-49}$$

On montre facilement [12] que T_β possède les propriétés suivantes :

- Pour tout $\beta > 0$, T_β est un opérateur borné dans $L^2(\Lambda)$ et satisfait

$$\| T_\beta \| \leq e^{\beta M} \tag{2-50}$$

- $T_\alpha\, T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- $\lim_{\beta \to 0} T_\beta\, \phi = \phi$ pour tout $\phi \in L^2(\Lambda)$.

Par suite (T_β) est un semi groupe fortement continu [16]. Il est clair que T_β est autoadjoint pour tout $\beta > 0$. Par suite [16] il existe un opérateur autoadjoint H défini par

$$H = -\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} (T_\beta - 1) \tag{2-51}$$

où la limite est prise au sens de la topologie forte des opérateurs, et tel que

$$T_\beta = \exp(-\beta H) \tag{2-52}$$

On voit facilement [12] que pour toute $\phi \in L^2(\Lambda)$ de classe C^2 à support compact contenu dans l'ouvert où $U(x)$ est continue

$$H\phi = \left(-\frac{1}{4}\Delta + U\right)\phi \qquad (2\text{-}53)$$

Par suite H est une extension autoadjointe de l'opérateur symétrique $-\frac{1}{4}\Delta + U$, et peut donc être pris comme le hamiltonien d'une particule dans un espace à ℓ dimensions, de masse m =2 (en prenant h = 1), et soumise au potentiel $U(x)$.

Il serait intéressant de déterminer plus explicitement l'extension définie par (2-51). Il est facile de voir sur des cas simples (par exemple pour $\ell = 1$ et $U(x) \equiv 0$) que cette extension correspond aux conditions aux limites qui consistent à imposer aux fonctions d'onde de s'annuler sur la frontière de Λ. C'est donc l'extension de Friedrichs [16] [11]. Il est probable que le même résultat est valable dans le cas général, mais la complexité de la démonstration est disproportionnée à l'intérêt de celui-ci.

3 - DEFINITION DES MATRICES DENSITES REDUITES

On considère un système de particules identiques enfermées dans un ouvert Λ de l'espace euclidien à ν dimensions R^ν. Soit $F_p = L^2(\Lambda^p)$ l'espace des fonctions de carré sommable de p variables $x_i \in \Lambda$ $(i = 1 \ldots p)$ et $F = \bigoplus_{p=0}^{\infty} F_p$ la somme directe hilbertienne des F_p. F est l'espace de Fock. Soit Δ_p l'opérateur identité dans F_p, $\Delta = \bigoplus_p \Delta_p$ l'identité dans F et $N = \bigoplus_p p\ \Delta_p$ l'operateur nombre de particules. On suppose donnee une matrice densité

$$\sigma = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \sigma_p \qquad (3\text{-}1)$$

σ est un opérateur auto-adjoint positif et a une trace finie : $\mathrm{Tr}\sigma = 1$. En particulier il en résulte que σ est un opérateur compact, ainsi que toutes ses composantes. Il résulte de (3-1) que σ commute au nombre de particules N. On suppose en outre que σ_p est invariante par permutation quelconque des p particules, pour chaque p. Soit alors un opérateur commutant au nombre de particules

$$A = \bigoplus_{p=0}^{\infty} A_p \tag{3-2}$$

où tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, et où chaque A_p est un opérateur borné auto-adjoint opérant dans F_p ; on suppose de plus que A_p est invariant par permutation des p particules. On associe à A un opérateur $\hat{A}$ auto-adjoint (non borné en général) défini de la façon suivante. Pour tout $q \geq p$, soit :

$$\hat{A}_q^p = \sum A_p \otimes \Delta_{q-p} \tag{3-3}$$

où la somme porte sur les C_q^p façons de partager q variables en deux familles de p et (q - p) variables chacune. Soit

$$\hat{A}_q = \sum_{p \leq q} \hat{A}_q^p \tag{3-4}$$

On définit

$$\hat{A} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \hat{A}_q = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \sum_{p \leq q} \hat{A}_q^p \tag{3-5}$$

La signification de la transformation $A \to \hat{A}$ est claire : par exemple, A est un potentiel à deux corps, ($A_p = 0$ pour $p \neq 2$) et $\hat{A}$ est l'opérateur correspondant à l'énergie potentielle du système. On définit la valeur moyenne de l'opérateur A par

$$< A > = \mathrm{Tr}(\sigma\hat{A}) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\sigma_q \hat{A}_q) \tag{3-6}$$

pourvu que cette expression ait un sens.

Il en sera ainsi si les σ_q décroissent assez vite quand q tend vers l'infini (par exemple si les σ_q sont tous nuls à partir d'un certain rang). On suppose cette condition réalisée. $< A >$ peut s'exprimer au moyen des A_p, plus simples en pratique que les $\tilde{A}_q$.

$$< A > = \sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{Tr} \left\{ \sigma_q \sum_{p \leq q} \sum A_p \ \Delta_{q-p} \right\} \tag{3-6}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \mathrm{Tr} \left\{ A_p \sum_{q=p}^{\infty} C_q^p \ \mathrm{Tr}_{q-p} \ \sigma_q \right\} \tag{3-7}$$

où Tr_{q-p} désigne la trace partielle par rapport à q-p variables, opération bien définie avec les propriétés supposées pour σ. On peut écrire

$$< A > = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p\,!} \ \mathrm{Tr} \ (A_p \ \bar{\rho}_p) \tag{3-8}$$

en posant

$$\bar{\rho}_p = p! \sum_{q \geq p} C_q^p \ \mathrm{Tr}_{q-p} \ \sigma_q \tag{3-9}$$

ou

$$\bar{\rho}_p = \sum_{q \geq p} \frac{q!}{(q-p)!} \ \mathrm{Tr}_{q-p} \ \sigma_q \tag{3-10}$$

$\bar{\rho}_p$ ainsi définie est la matrice densité réduite à p particules [17].

Aucune hypothèse n'a été faite sur la statistique des particules. Dans le cas (SB), tout vecteur de F_q représente un état physique de q particules. Dans le cas (SQ), seuls sont admissibles dans chaque F_q, les vecteurs de symétrie convenable. Soit $\varepsilon = + 1$, S_q^{ε} l'opérateur de ε-symétrisation (symétrisation pour $\varepsilon = + 1$, et antisymétrisation pour $\varepsilon = - 1$) des fonctions de q variables, défini par :

$$S_q^\varepsilon f(x_1,\ldots,x_q) = \sum_\pi \varepsilon^\pi \quad f(x_{\pi(1)},\ldots, x_{\pi(q)}) \qquad (3\text{-}11)$$

où la somme est à prendre sur les permutations de q variables, et où ε^π est + 1 si $\varepsilon = +1$, et la signature de π si $\varepsilon = -1$. S_q satisfait $(S_q^\varepsilon)^2 = q!\, S_q^\varepsilon$, et le projecteur sur le sous espace ε- symétrique de F_q est $\Delta_q^\varepsilon = \frac{1}{q!}\, S_q^\varepsilon$.

La matrice densité d'un système obéissant a la ε-statistique (Bose-Einstein pour $\varepsilon = +1$, Fermi-Dirac pour $\varepsilon = -1$), doit satisfaire, pour tout q

$$\sigma_q\, S_q^\varepsilon \; (= S_q^\varepsilon\, \sigma_q) = q!\, \sigma_q \qquad (3\text{-}12)$$

On passe maintenant au cas particulier d'un gaz en équilibre thermodynamique. On suppose que Λ est un ouvert borné de volume V, dont la frontière est de classe C^2. (Cette dernière restriction est mathématiquement commode, car elle permet d'utiliser le lemme (2-9). Elle n'a pas de signification physique particulière). On suppose que les particules interagissent par un potentiel à deux corps satisfaisant les conditions (A), (B) ou (B'), et (D), de la section (I-1), et que le système est en équilibre thermodynamique à la température T. On utilise le formalisme grand canonique. Les unités sont choisies de façon que $\hbar = 1$ et que la masse commune des particules soit 2. On pose

$\beta = 1/k\,T$

$\lambda = \sqrt{\pi\beta}$, longueur d'onde thermique.

z = activité (ou fugacité) du système.

On note x, y, u, v (respectivement ω, $\bar{\omega}$) des points (respectivement des trajectoires) dans R^ν. Une barre supérieure dans $\bar{\omega}$ signifie toujours que la trajectoire $\bar{\omega}$ est variable d'intégration. On note x^m (respectivement ω^m) des familles de m points (respectivement trajectoires) dans R^ν et x_i (respectivement ω_i) , i = 1,...,m, les éléments de telles familles.

On appelle

S^m l'ensemble des familles ω^m de m trajectoires continues dans $R^\nu (S^1 = S)$

S^m_Λ le sous ensemble de S^m formé des trajectoires qui restent dans Λ^m $(S^1_\Lambda = S_\Lambda)$.

$\alpha_\Lambda(\omega)$ la fonction caractéristique de S_Λ et $\alpha_\Lambda(\omega^m)$ celle de S^m_Λ :

$$\alpha_\Lambda (\omega^m) = \prod_{i=1}^{m} \alpha_\Lambda(\omega_i) \tag{3-13}$$

On pose

$$\psi_\beta (x^m - y^m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda^\nu} \exp\left[-\frac{1}{\beta}(x_j - y_j)^2\right] \tag{3-14}$$

$$U(\omega^m) = \sum_{1 \leq j < k \leq m} \int_0^\beta \Phi(\omega_j(t) - \omega_k(t))\, dt \tag{3-15}$$

Il résulte de (D) que :

$$U(\omega^m) \geq - m \beta B \tag{3-16}$$

L'intégrale de Wiener d'une fonction $h(\omega^m)$ est notée $\int P_{x^m, y^m}(d\omega^m)\, h(\omega^m)$.

Soit $H_m(x^m, y^m)$ le hamiltonien de m particules dans la boîte Λ. On a vu dans la section (I-2) que

$$\exp\left[-\beta H_m\right](x^m, y^m) = \int P_{x^m, y^m}(d\omega^m) \alpha_\Lambda(\omega^m) \exp\left[-U(\omega^m)\right] \tag{3-17}$$

Cette quantité est une fonction continue de (x^m, y^m), pour $x^m \in F_m$, $y^m \in F_m$,

où $$F_m = \left\{ x^m : x_i - x_j \in F \text{ pour au moins un couple } (i,j) \right\} \tag{3-18}$$

Elle est bornée, grâce à (3-16), par

$$e^{m\beta B}\ \psi_\beta(x^m - y^m) \tag{3-19}$$

Considéré comme operateur dans $L^2(\Lambda^m)$, $\exp(-\beta H_m)$ est auto-adjoint, borné, positif et de trace finie. Plus précisément, il résulte immédiatement de (3-17) et de (3-19) que

$$\mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta H_m)\right] \leq \left(\frac{V}{\lambda^\nu}\right)^m \exp(m\beta B) \tag{3-20}$$

$$\left\| \exp(-\beta H_m) \right\|_2 \leq \exp(m\beta B) \tag{3-21}$$

On considère successivement les cas (SB) et (SQ).

1) Cas (SB). La matrice densité du système est

$$\sigma = Z^{-1} \bigoplus_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \exp(-\beta H_q) \tag{3-22}$$

où

$$Z = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta H_q)\right] \tag{3-23}$$

Z est la fonction de partition (associée au volume Λ).

La matrice densité réduite à m particules est définie par (3-10) :

$$\overline{\rho}_\Lambda(x^m, y^m) = Z^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int_{\Lambda^s} du^s \exp(-\beta H_{m+s})\,(u^s x^m, u^s y^m) \tag{3-24}$$

c'est-à-dire

$$\overline{\rho}_\Lambda(x^m, y^m) = Z^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int du^s \; P_{u^s x^m, u^s y^m}(d\omega^{m+s})\,\alpha_\Lambda(\omega^{m+s})$$

$$\times \quad \exp\left[-U(\omega^{m+s})\right] \tag{3-25}$$

avec

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int d x^m P_{x^m, x^m} (d\omega^m) \alpha_\Lambda(\omega^m) \exp\left[-U(\omega^m)\right] \qquad (3\text{-}26)$$

(3-25) peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\rho}_\Lambda(x^m, y^m) = \int P_{x^m, y^m} (d\omega^m) \rho_\Lambda(\omega^m) \qquad (3\text{-}27)$$

avec

$$\rho_\Lambda(\omega^m) = Z^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int du^s P_{u^s, u^s} (d\bar{\omega}^s) \alpha_\Lambda(\omega^m, \bar{\omega}^s) \exp\left[-U(\omega^m, \bar{\omega}^s)\right] \qquad (3\text{-}28)$$

Il résulte de (3-16) que la série (3-28) converge uniformément par rapport à ω^m, ce qui, joint au théorème de Fubini, permet de passer de (3-25) à (3-27), (3-28). En outre, la série (3-25) converge uniformément par rapport à (x^m, y^m), et au sens de la norme des opérateurs dans $L^2(\Lambda^m)$. Z définie par (3-26) est une fonction entière de z. Enfin ρ_Λ, $\bar{\rho}_\Lambda$ et Z sont majorées par :

$$|Z| \leq \exp\left[\frac{V}{\lambda^\nu} |z| \exp \beta B\right] \qquad (3\text{-}29)$$

$$|\rho_\Lambda(\omega^m)| \leq \frac{1}{|Z|} (|z| e^{\beta B})^m \exp\left[\frac{V}{\lambda^\nu} |z| e^{\beta B}\right] \qquad (3\text{-}30)$$

$$|\bar{\rho}_\Lambda(x^m, y^m)| \leq \frac{1}{|Z|} (|z| e^{\beta B})^m \exp\left(\frac{V}{\lambda^\nu} |z| e^{\beta B}\right) \psi_\beta(x^m - y^m) \qquad (3\text{-}31)$$

---

2) Cas (SQ). La matrice densité du système est [17] :

$$\sigma = Z_\varepsilon^{-1} \bigoplus_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} S_q^\varepsilon \exp(-\beta H_q) \qquad (3\text{-}32)$$

où $$Z_\varepsilon = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \quad \mathrm{Tr}\left[S_q^\varepsilon \exp\left(-\beta H_q\right)\right] \tag{3-33}$$

et $\varepsilon = +1$ pour des bosons et -1 pour des fermions.

La matrice densité réduite a m particules est alors définie par (3-10), qui devient :

$$\bar{\rho}_\Lambda (x^m, y^m) = Z_\varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int_{\Lambda^s} du^s \sum_\pi \varepsilon^\pi \exp\left[-\beta H_{m+s}\right] (u^s x^m, \pi (u^s y^m)) \tag{3-34}$$

où π est une permutation du nombre convenable de variables, ici $m + s$, et où la seconde somme porte sur toutes ces permutations ; ε^π est défini comme précédemment. On reporte (3-17) dans (3-34) et on obtient :

$$\bar{\rho}_\Lambda (x^m, y^m) = Z_\varepsilon^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int du^s \sum_\pi \varepsilon^\pi \; P_{u^s x^m, \pi(u^s y^m)} (d\omega^{m+s})$$

$$\times \; \alpha_\Lambda(\omega^{m+s}) \exp\left[-U(\omega^{m+s})\right] \tag{3-35}$$

La fonction de partition Z_ε est donnée par :

$$Z_\varepsilon = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int dx^m \sum_\pi \varepsilon^\pi P_{x^m, \pi(x^m)} (d\omega^m) \; \alpha_\Lambda(\omega^m) \exp\left[-U(\omega^m)\right] \tag{3-36}$$

On va maintenant mettre (3-35) sous une forme plus utile, n'introduisant qu'en dernier lieu l'intégration fonctionnelle qui fait apparaître (x^m, y^m). Ceci nécessite des interversions de sommes et d'intégrations. On commence par effectuer les opérations algébriques sans se soucier des problèmes de convergence. On établira ensuite des bornes absolues uniformes par rapport aux variables d'intégration, qui justifieront ces opérations. On appelle longueur d'une trajectoire la longueur de l'intervalle de variation du paramètre t.

(3-35) contient une intégration sur m + s trajectoires, avec s identifications de points extrêmes. Dans le cas (SB), on obtenait ainsi m trajectoires ouvertes de longueur β allant de x^m à y^m, et s cycles fermés de longueur β. Dans le cas présent, du fait de la permutation π, un certain nombre des trajectoires initiales peut venir s'insérer entre x_k et le y qu'on atteint à partir de x_k, et qui en général n'est pas y_k, pour former une trajectoire ouverte de longueur $j_k\beta$. Les trajectoires initiales non consommées dans ce processus s'assemblent en cycles fermés de longueur multiple de β. On va donc transformer (3-35) en deux étapes. La première consiste à regrouper et extraire les sommes et intégrations concernant les trajectoires ouvertes, et s'appuie sur le lemme 1 ci-dessous. La seconde consiste à mettre en évidence les cycles fermés. On pose

$$q = \sum_{k=1}^{m} j_k \qquad (3\text{-}37)$$

Lemme (3-1)

$$\left(\sum_{\pi} \varepsilon^{\pi}\, \pi\right)_{m+s} \; P_{x^m u^s, y^m u^s}\, (d\omega^{m+s})\, du^s = \sum_{r=0}^{s} C_s^r \sum_{j^m} (s-r)!\, \varepsilon^{q-m} \times$$

$$\left(\sum_{\pi} \varepsilon^{\pi}\, \pi\right)_m \; P^{j^m}_{x^m, y^m}\, (d\omega^m) \left(\sum_{\pi} \varepsilon^{\pi}\, \pi\right)_r \; P_{u^r, u^r}\, (d\bar{\omega}^r)\, du^r \qquad (3\text{-}38)$$

où les sommes de permutations opèrent sur les éléments différentiels contenant les variables $(x^m u^s, y^m u^s)$, (x^m, y^m) et (u^r, u^r) selon la règle suivante

$$\left(\sum_{\pi} \varepsilon^{\pi}\, \pi\right)_m P_{x^m, y^m}\, (d\omega^m) = \sum_{\pi} \varepsilon^{\pi}\; P_{x^m,\, \pi(y^m)}\, (d\omega^m) \qquad (3\text{-}39)$$

La somme sur $j^m = (j_1, \ldots, j_m)$ est limitée par les conditions $j_k \geq 1$ (pour $1 \leq k \leq m$) et $q = s + m - r$. L'indice supérieur j^m dans l'avant dernier facteur signifie que la trajectoire partant de x_k est de longueur $j_k\beta$ pour $k = 1, \ldots, m$.

Démonstration. Les differents facteurs apparaissant au second membre correspondent à la décomposition suivante du premier :

- On fixe r, ou, ce qui revient au même, $q = m + s - r$, qui sont les nombres de trajectoires élémentaires utilisées pour former respectivement les cycles fermés et les trajectoires ouvertes. On devra donc sommer sur r.
- On sépare les s variables u en un groupe de $(s - r)$ affecté aux trajectoires ouvertes et un groupe de r affecté aux cycles fermés. Il vient un facteur C_s^r
- On fixe les longueurs des trajectoires ouvertes (qu'on peut caractériser par leurs points de départ), c'est-à-dire j^m soumis à la restriction $\sum_k j_k = q = m + s - r$

  On devra donc sommer sur j^m soumis à cette restriction.
- On distribue les $(s - r)$ variables u choisies sur les trajectoires ouvertes, ce qui donne un facteur $(s - r)$!
- On somme sur toutes les permutations des y et on intègre sur les trajectoires ouvertes.
- On permute les r variables u des cycles fermés de toutes les façons possibles, et on intègre sur les r trajectoires élémentaires formant ces cycles.
- Enfin, le facteur ε^{q-m} s'obtient facilement par récurrence sur $q - m$.

En utilisant le lemme (3-1), on met facilement (3-35) sous la forme :

$$\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m) = \sum_\pi \varepsilon^\pi \sum_{j_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{j_m=1}^{\infty} \varepsilon^{q-m} \int p^{j^m}_{x^m,\ \pi(y^m)} (d\omega^m) \rho_\Lambda(\omega^m,j^m) \tag{3-40}$$

avec

$$\rho_\Lambda(\omega^m,j^m) = Z_\varepsilon^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{q+r}}{r!} \int du^r \sum_\pi \varepsilon^\pi P_{u^r,\ \pi(u^r)} (d\bar{\omega}^r) \times$$

$$\alpha_\Lambda(\omega^m, \bar{\omega}^r) \exp\left[- U(\omega^m,j^m ; \bar{\omega}^r)\right] \tag{3-41}$$

où (ω^m,j^m) désigne une famille de m trajectoires ω_k de longueurs respectives $j_k\beta$, et où l'exposant du dernier facteur est le même que dans (3-35) avec un simple changement de notation des variables.

La deuxième étape de la transformation de (3-35) consiste à regrouper les $\bar{\omega}^r$ en cycles fermés, et s'appuie sur les propriétés suivantes du groupe symétrique $\mathcal{S}_r$: toute permutation π est un produit de cycles. Soit δ_j le nombre de cycles de longueur j. On a

$$\sum_{j=1}^{r} j\ \delta_j = r \tag{3-42}$$

Une classe δ d'éléments conjugués est l'ensemble des permutations qui ont la même décomposition en cycles, c'est-à-dire les mêmes δ_j. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les classes de permutations δ et les familles d'entiers positifs (δ_j) satisfaisant (3-42). Les éléments d'une même classe s'obtiennent en distribuant les r objets de toutes les façons possibles dans les cycles. Leur nombre est

$$h^r_\delta = r\ !\ /\ \prod_{j=1}^{r} (j^{\delta_j}\ \delta_j\ !) \tag{3-43}$$

On considère maintenant l'intégration sur $(\bar{\omega}^r, u^r)$ dans (3-41). La contribution d'une permutation $\pi \in \mathcal{S}_r$ ne dépend que de la classe δ de π, car deux éléments d'une même classe donnent des contributions qui ne diffèrent que par un changement de nom des variables d'intégration. La fonction à intégrer ne dépend pas de l'ordre des cycles formés à partir de $\bar{\omega}^r$. On note $\bar{\omega}^\delta$ la famille de cycles correspondant à la classe δ. De la même façon, la fonction à intégrer et par suite ρ_Λ sont indépendants de l'ordre des trajectoires ouvertes ; Par suite, les variables j^m sont suffisamment décrites par une partition de m en entiers γ_j tels que $m = \sum \gamma_j$, j figurant γ_j fois dans j^m. $\gamma = (\gamma_j)$ peut être associé biunivoquement à une classe de permutations de $q = \sum j\,\gamma_j$ variables comprenant γ_j cycles de j éléments (j = 1,2,...). On remplace donc la notation (ω^m, j^m) par ω^γ. On transforme enfin l'élément différentiel dans (3-41). On choisit une permutation π dans chaque classe δ. La somme sur π devient une somme sur δ, chaque terme contenant en outre un facteur h_δ^r. On factorise l'élément différentiel d'un δ donné en produit des contributions des différents cycles de δ. On note que

$$\varepsilon^\pi = \varepsilon^{\sum (j-1)\,\delta_j} \tag{3-44}$$

et on pose

$$d_\varepsilon\,\omega^\delta = \prod_j \frac{1}{\delta_j!} \prod \left(\frac{\varepsilon^{j+1}}{j} \quad P^j_{x,x}\,(d\omega)\,dx \right) \tag{3-45}$$

où le second produit porte sur les δ_j cycles de longueur j, et qu'on écrit plus simplement :

$$d_\varepsilon\,\omega^\delta = \prod_j \frac{1}{\delta_j!} \left(\frac{\varepsilon^{j+1}}{j} \quad P^j_{x,x}\,(d\omega)\,dx \right)^{\delta_j} \tag{3-46}$$

(3-41) s'écrit alors :

$$\rho_\Lambda(\omega^\gamma) = Z_\varepsilon^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} z^{q+r} \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \bar{\omega}^\delta\; a_\Lambda(\omega^\gamma, \bar{\omega}^\delta)\, \exp\left[- U(\omega^\gamma, \bar{\omega}^\delta) \right] \tag{3-47}$$

avec

$$Z_\varepsilon = \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \bar{\omega}^{\delta} \; \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^{\delta}) \exp\left[- U(\bar{\omega}^{\delta}) \right] \tag{3-48}$$

où $\sum_{a(b)}$ signifie somme sur a, pour b fixé, et $U(\omega^\gamma)$ est défini par :

$$U(\omega^\gamma) = \int_0^\beta dt \sum_{k=1}^{m} \sum_{0 \le j < j' \le j_k - 1} \Phi(\omega_k(t + j\beta) - \omega_k(t + j'\beta)) +$$

$$\sum_{1 \le k < k' \le m} \sum_{j=0}^{j_k - 1} \sum_{j'=0}^{j_{k'} - 1} \Phi(\omega_k(t + j\,\beta) - \omega_{k'}(t + j'\beta)) \Bigg\} \tag{3-49}$$

$U(\bar{\omega}^{\delta})$ et $U(\omega^\gamma, \bar{\omega}^{\delta})$ sont définis de façon analogue.

La légitimité des transformations algébriques qui précèdent résulte des majorations suivantes, qui sont des majorations absolues terme à terme des séries en z. On rappelle que le potentiel satisfait les conditions (A), (B) ou (B'), et (D) de (I-1). (D) entraîne

$$U(\omega^\gamma, \bar{\omega}^{\delta}) \gtrsim - (q + r)\, \beta\, B \tag{3-50}$$

Par suite

$$|Z_\varepsilon| \le \sum_{r=0}^{\infty} (|z|\, e^{\beta B})^r \sum_{\delta(r)} \prod_j \frac{1}{\delta_j!} \left(\frac{V}{\lambda^\nu} \frac{1}{j^{\nu/2+1}} \right)^{\delta_j} \tag{3-51}$$

$$|Z_\varepsilon| \le \exp\left\{ \frac{V}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|z|\, e^{\beta B})^j}{j^{\nu/2+1}} \right\} \tag{3-52}$$

Par suite Z_ε est une fonction analytique de z pour $|z| < e^{-\beta B}$, avec $Z_\varepsilon(0) = 1$. On obtient alors pour $\rho_\Lambda(\omega^\gamma)$ la majoration uniforme en ω^γ:

$$|\rho_\Lambda(\omega^\gamma)| \leq \frac{1}{|Z_\varepsilon|} \sum_{r=0}^{\infty} (|z|\, e^{\beta B})^{q+r} \sum_{\delta(r)} \prod_j \frac{1}{\delta_j!} \left(\frac{V}{\lambda^\nu} \frac{1}{j^{\nu/2+1}} \right)^{\delta_j} \tag{3-53}$$

ou

$$|\rho_\Lambda(\omega^\gamma)| \leq \frac{1}{|Z_\varepsilon|} (|z|\, e^{\beta B})^q \exp \left\{ \frac{V}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|z|\, e^{\beta B})^j}{j^{\nu/2+1}} \right\} \tag{3-54}$$

pourvu que la série converge, c'est-à-dire encore pour $|z| < e^{-\beta B}$. Pour obtenir (3-51) et (3-53), on a utilisé la majoration

$$\int P_{x\,x}^{j} (d\omega)\, dx\, \alpha_\Lambda(\omega) \leq \frac{V}{\lambda^\nu} \cdot \frac{1}{j^{\nu/2}} \tag{3-55}$$

On déduit de (3-54) la majoration suivante pour $\bar{\rho}_\Lambda$:

$$|\bar{\rho}_\Lambda (x^m, y^m)| \leq \frac{1}{|Z_\varepsilon|} \exp\left\{ \frac{V}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|z|\, e^{\beta B})^j}{j^{\nu/2+1}} \right\} m! \left\{ \frac{1}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|z|\, e^{\beta B})^j}{j^{\nu/2+1}} \right\}^m \tag{3-56}$$

Finalement, les interversions de somme et d'intégration sont justifiées et les $\rho_\Lambda(\omega^\gamma)$, $\bar{\rho}_\Lambda (x^m, y^m)$ sont bien définies pour $|z| < e^{-\beta B}$.

On termine cette section en retrouvant dans le cas particulier des particules libres, des résultats classiques [18]. Pour $\Phi = 0$, donc $U = 0$, la fonction de partition devient :

$$Z_\varepsilon = \exp \left\{ \sum_1^{\infty} \varepsilon^{j+1} \frac{a_j\, z^j}{j} \right\} \tag{3-57}$$

où $a_j = \int P_{uu}^{j} (d\omega)\, du\, \alpha_\Lambda(\omega)$. Si on néglige dans l'intégration sur ω, la

restriction au volume Λ, a_j se réduit à $V/\lambda^\nu j^{\nu/2}$, et (3-57) donne le résultat bien connu

$$\frac{1}{V} \text{ Log } Z_\varepsilon = \frac{1}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \frac{z^j}{j^{\nu/2+1}} \tag{3-58}$$

D'autre part $\rho_\Lambda(\omega^\gamma) = z^q \alpha_\Lambda(\omega^\gamma)$. (3-59)

$$\bar{\rho}_\Lambda(x^m, y^m) = \sum_{\pi} \varepsilon^{\pi} \prod_{j=1}^{m} \bar{\rho}_\Lambda(x_j, \pi(y_j)) \tag{3-60}$$

où

$$\bar{\rho}_\Lambda(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j+1} z^j \int P^j_{xy}(d\omega) \alpha_\Lambda(\omega) \tag{3-61}$$

Cette expression garde un sens quand le volume devient infini :

$$\bar{\rho}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j+1} \frac{z^j}{j^{\nu/2}} \frac{1}{\lambda^\nu} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{j\beta}\right) \tag{3-62}$$

En particulier, pour $x = y$, on trouve la série de Mayer bien connue :

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}(x,x) = \frac{1}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j+1} z^j / j^{\nu/2} \tag{3-63}$$

II - CADRE MATHEMATIQUE

Ce chapitre présente le cadre mathématique et en particulier algébrique, qu'on utilisera par la suite pour étudier les MDR. Ce formalisme est décalqué sur celui qu'a introduit Ruelle [8,9] en mécanique classique pour l'étude des fonctions de corrélation, avec deux différences essentielles correspondant aux deux difficultés mentionnées dans l'introduction. La première se traduit, dans les deux cas (SB) et (SQ), par le remplacement des points de R^ν par les trajectoires dans R^ν, et de l'intégrale de Lebesgue par l'intégrale de Wiener. La deuxième est l'introduction des statistiques quantiques dans le cas SQ. On traite les deux cas (SB) et (SQ) séparément. Dans chacun d'eux, on définit une algèbre de suites de fonctions de trajectoires et une algèbre de suite de fonctions de couples de points. Les fonctions ρ_Λ sont les composantes d'un vecteur de la première, les MDR celles d'un vecteur de la seconde, et l'intégration qui fait passer des unes aux autres un homomorphisme de la première sur la seconde. Des manipulations algébriques élémentaires fournissent, entre autres résultats, une propriété sur le signe des coefficients de la série de Mayer pour des potentiels purement répulsifs dans le cas (SB) et, dans le cas (SQ), pour des fermions.

1 - STATISTIQUE DE BOLTZMANN

Dans toute cette section, l'espace des trajectoires continues est muni, sauf indication explicite du contraire, de la topologie de la convergence uniforme. On définit $F_m \subset R^{\nu m}$ par

$$F_m = \left\{ x^m : x_i - x_j \in F \text{ pour au moins un couple } (i,j) \right\} \quad (1\text{-}1)$$

où F est un fermé de capacité nulle qui sera identifié par la suite avec l'ensemble des points de discontinuité du potentiel qui apparaît dans la condition (B) ou (B') de la section (I-1). On définit d'abord un espace vectoriel complexe E de suites de fonctions continues de familles finies de trajectoires. Dans ce but :

1) On se donne, pour tout m entier > 0, un sous ensemble $\mathfrak{G}_m$ de S_m possédant les propriétés suivantes :

($\mathfrak{G}$1). $\mathfrak{G}_m$ est fermé.

($\mathfrak{G}$2). $\mathfrak{G}_m$ est de P_{x^m,y^m}- mesure nulle pour tout $x^m \notin F_m, y^m \notin F_m$,

où F_m est défini par (1-1).

($\mathfrak{G}$3). Si une sous famille ω^p de ω^m est dans $\mathfrak{G}_p$ ($p \leq m$), alors $\omega^m \in \mathfrak{G}_m$.

($\mathfrak{G}$4). Pour tout $\omega^m \notin \mathfrak{G}_m$ et pour tout $p > 0$, l'ensemble des $\overline{\omega}^p$ tels que $(\omega^m, \overline{\omega}^p) \in \mathfrak{G}_{m+p}$ est de P_{x^p,x^p}- mesure nulle pour presque tout x^p.

2) On se donne également une fonction d'une trajectoire $\Delta(\omega)$ satisfaisant :

(Δ1) $\Delta(\omega)$ est définie sur S, continue, réelle, et Inf $\Delta(\omega) > 0$.

(Δ2) Pour η réel positif assez petit, il existe une fonction réelle positive $\Delta_\eta(\omega)$, $P_{x,y}$- intégrable pour tout (x,y), et telle que $\|\omega - \omega'\| \leq \eta$ entraîne

$$\Delta(\omega') \leq \Delta_\eta(\omega) \qquad (1\text{-}2)$$

On pose $\Delta(\omega^m) = \prod_{j=1}^{m} \Delta(\omega_j)$

et on définit $\Delta_\eta(\omega^m)$ de façon analogue.

On appelle alors E_m l'espace vectoriel complexe des fonctions de m trajectoires ω^m, définies et continues sur le complémentaire de $\mathfrak{G}_m$, et telles que $|f(\omega^m)| \,/\, \Delta(\omega^m)$ soit bornée. On appelle E le produit direct des E_m, c'est-à-dire l'espace vectoriel des suites de fonctions de m trajectoires $h = (h(\omega^m), m = 0,1...)$ telles que pour tout m, $h(\omega^m) \in E_m$. La composante $m = 0$ de h se réduit à un scalaire complexe h_0. On appelle E^+ le sous espace des $h \in E$ pour lesquels $h_0 = 0$.

La définition précédente appelle quelques remarques qui en éclairent l'origine.

(R1) Les propriétés ($\mathfrak{G}$ 1 → 4) sont satisfaites par les $\mathfrak{G}_m$ particuliers suivants : soit Λ un ouvert borné de R^ν dont la frontière est de classe C^2, et $\bar{\Lambda}$ la fermeture de Λ. Soit $\alpha_\Lambda(\omega)$ et $\alpha_\Lambda(\omega^m)$ les fonctions caractéristiques de S_Λ et S^m_Λ. Physiquement, Λ sera la région où est enfermé le système. Soit Φ un potentiel satisfaisant les conditions (A), et (B) ou (B'). On prend :

$$\mathfrak{G}_1 = \left\{\omega : \omega \subset \bar{\Lambda} \text{ mais } \omega \not\subset \Lambda\right\}$$

$$\mathfrak{G}_2 = \left\{(\omega_1,\omega_2) : \omega_1 \in \mathfrak{G}_1 \text{ ou } \omega_2 \in \mathfrak{G}_1, \text{ ou } \omega_1 - \omega_2 \text{ rencontre F, ou}\right.$$

$$\left.\omega_1 - \omega_2 \text{ rencontre la frontière du coeur sans y pénétrer.}\right\}$$

$$\mathfrak{G}_m = \left\{\omega^m : (\omega_i,\omega_j) \in \mathfrak{G}_2 \text{ pour au moins un couple } (i,j)\right\}$$

La vérification de ($\mathfrak{G}$ 1 → 4) résulte des lemmes de la section (I-2). ($\mathfrak{G}$ 1) résulte du lemme (I-2-11). ($\mathfrak{G}$ 2) résulte des lemmes (I-2-10) et respectivement (I-2-8) et (I-2-9) selon que les points de départ et d'arrivée des trajectoires sont ou ne sont pas sur la frontière du coeur ou sur la frontière de Λ. ($\mathfrak{G}$ 4) se démontre de façon analogue. ($\mathfrak{G}$ 3) est trivial.

Le choix précédent des $\mathfrak{G}_m$ a pour but et pour effet d'assurer que les fonctions $\alpha_\Lambda(\omega^m)$ et $f(\omega^m) = \exp\left[-U(\omega^m)\right]$, où $U(\omega^m)$ est défini par (I-3-15) sont dans E_m pour tout m.

(R2) Les fonctions Δ les plus simples satisfaisant ($\Delta 1$) et ($\Delta 2$) sont les constantes positives. Elles seront utilisées dans les cas de potentiel sans coeur dur. En présence de coeur dur, on utilisera des Δ plus compliqués qui seront définis en temps utile.

La condition ($\Delta 2$) est analogue à la continuité uniforme, mais plus faible que celle-ci.

(R3) Les propriétés ($\mathfrak{G}$ 1,2) et (Δ 1,2) entrainent le résultat suivant :

Lemme (1-1). Si $f \in E_m$ et si $x^m \notin F_m$, $y^m \notin F_m$, alors f est P_{x^m,y^m}- intégrable et l'intégrale $\overline{f}\ (x^m,y^m) = \int P_{x^m,y^m}(d\omega^m)\ f(\omega^m)$ est une fonction continue de (x^m,y^m).

Démonstration. On néglige l'indice m, qui ne joue aucun rôle. Soit $\omega \notin \mathfrak{G}$ et ω_n le contour polygonal joignant les points $\omega(j\ \frac{\beta}{n})$ $(j = 0,\ldots, n)$. ω_n tend vers ω quand n tend vers l'infini, donc $\omega_n \notin \mathfrak{G}$ pour n assez grand ($\mathfrak{G}$ 1). La suite de fonctions $f_n(\omega) = f(\omega_n)$ tend vers $f(\omega)$, car f est continue. D'autre part, $f_n(\omega)$ est continue au sens de la topologie de la convergence simple des ω, donc est intégrable. Donc $f(\omega)$ est limite simple presque partout ($\mathfrak{G}$ 2) de fonctions intégrables. D'autre part, $f_n(\omega)$ est majorée uniformément en n pour n assez grand par une fonction intégrable ($\Delta 2$). Donc, d'après le théorème de Lebesgue [15], f est intégrable.

On se limite, dans la démonstration de la continuité, à celle en y pour x fixé à l'origine, l'extension au cas général étant triviale. On voit facilement en revenant aux définitions que

$$\int P_{oy}(d\omega)\ f(\omega) = \exp\ (-y^2/\beta) \int P_{oo}(d\omega)\ f(T_y\omega) \qquad (1\text{-}4)$$

où la trajectoire $T_y\omega$ est définie par $T_y\omega(t) = \omega(t) + \frac{t}{\beta}\, y$.

Soit y' voisin de y. Quand y' tend vers y, $T_{y'}\omega$ tend vers $T_y\omega$, donc $f(T_{y'}\omega)$ tend vers $f(T_y\omega)$, car f est continue. D'autre part, d'après ($\Delta 2$), pour tout y' tel que $|y' - y| \leq \Delta_\eta$

$$|f(T_{y'}\omega)| \leq \Delta_\eta(T_y\omega) \qquad (1\text{-}5)$$

Donc $f(T_{y'}\omega)$ est majorée, uniformément en y' dans un voisinage de y, par une fonction intégrable. Le théorème de Lebesgue [15] donne alors immédiatement le résultat.

(R4) La propriété ($\mathcal{G}$3) a pour but d'assurer que si $f(\omega^m) \in E_m$, $g(\bar{\omega}^n) \in E_n$, alors $f(\omega^m)\ g(\bar{\omega}^n) \in E_{m+n}$

L'utilité de ($\mathcal{G}$4) apparaitra plus loin.

On définit maintenant sur E une structure d'algèbre commutative. On note X, Y, etc., des suites finies de trajectoires. En particulier, dans cette section, X signifie toujours ω^m. On définit un produit dans E : $(h_1, h_2 \to h = h_1 * h_2$, par :

$$h\ (X) = \sum_{Y \subset X} h_1(Y)\ h_2(X-Y) \qquad (1\text{-}6)$$

où la sommation porte sur toutes les sous suites Y de X ; les trajectoires sont dans le même ordre dans Y et dans X-Y que dans X. E devient une algèbre commutative avec une unité $\mathbb{1} = (1, 0, 0, \ldots)$. On définit une application Γ de E^+ dans $\mathbb{1} + E^+$ comme l'* -exponentielle :

$$\Gamma\ h = \mathbb{1} + h + \ldots + \frac{h^{*n}}{n!} + \ldots \qquad (1\text{-}7)$$

Plus explicitement

$$\Gamma\, h\,(X) = \sum_{p}\sum \; h\,(X_1)\ldots h\,(X_p) \qquad (1\text{-}8)$$

où la deuxième somme est à prendre sur toutes les partitions de X en sous-suites (non vides) $X_1,\ldots, X_p$. Pour chaque X, la somme dans (1-8) est donc finie. Γ ainsi défini applique E^+ sur $\mathbb{1} + E^+$ et a un inverse unique Γ^{-1}. On étend facilement Γ en une application biunivoque de E sur E en posant, pour $h = h_0\mathbb{1} + h^+$, où $h^+ \in E^+$

$$\Gamma\,(h) = e^{h_0}\,\Gamma(h^+) \qquad (1\text{-}9)$$

On définit ensuite, comme en mécanique classique [9], des dérivations dans E, par

$$D_\omega\, h(\omega^m) = h\,(\omega, \omega_1,\ldots,\omega_m) \qquad (1\text{-}10)$$

$$D_X\, h \quad = D_{\omega_1} \ldots D_{\omega_m}\, h \qquad (1\text{-}11)$$

D_ω est linéaire et satisfait

$$D_\omega(h_1 * h_2) = (D_\omega\, h_1) * h_2 + h_1 * D_\omega\, h_2 \qquad (1\text{-}12)$$

$$D_\omega\,(\Gamma h) = (D_\omega\, h) * \Gamma h \qquad (1\text{-}13)$$

Plus généralement, on montre par récurrence sur m que

$$D_X\,(f_1 * f_2) = \sum_{Y \subset X} D_Y f_1 * D_{X-Y} f_2 \qquad (1\text{-}14)$$

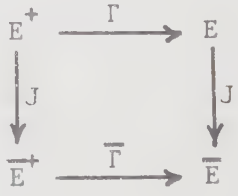
On considère maintenant l'espace vectoriel complexe $\overline{E}$ des suites de fonctions de m couples de points de R^ν, $\overline{h} = (\overline{h}\,(x^m, y^m),\ m = 0, 1,\ldots)$, où pour chaque m, $\overline{h}\,(x^m, y^m)$ est définie et continue pour $x^m \notin F_m$, $y^m \notin F_m$.

Soit $\overline{E}^+$ le sous espace des $\overline{h} \in \overline{E}$ pour lesquels $\overline{h}_0 = 0$. On définit comme précédemment un produit $\overline{*}$ dans $\overline{E}$ et une application $\overline{\Gamma}$ de $\overline{E}^+$ sur $\mathbb{1} + \overline{E}^+$ comme l'$\overline{*}$-exponentielle, la seule différence avec les opérations définies dans E étant le remplacement de chaque trajectoire par un couple de points (x,y), qu'on peut se représenter comme les extrémités d'une trajectoire.

On peut alors définir grâce au lemme (1-1) une application linéaire J de E dans $\overline{E}$ par $h \in E \to \overline{h} = Jh \in \overline{E}$, où

$$\begin{cases} \overline{h}_0 = h_0 \\ \overline{h}(x^m, y^m) = \int P_{x^m, y^m} (d\omega^m)\ h(\omega^m) \end{cases} \qquad (1\text{-}15)$$

J est trivialement un homomorphisme de E dans $\overline{E}$ et le diagramme ci-contre est commutatif. Cette construction très simple aura un analogue plus intéressant dans le cas (SQ).



Soit maintenant $\alpha(\omega) \in E_1$ et telle que

$$\int P_{xx}(d\omega)\ dx\ \Delta(\omega)\ |\alpha(\omega)| < +\infty \qquad (1\text{-}16)$$

Soit $\alpha \in E$ défini par

$$\alpha_0 = 1 \qquad \alpha(\omega^m) = \prod_{j=1}^{m} \alpha(\omega_j) \qquad (1\text{-}17)$$

α peut être considéré comme l'$*$-exponentielle de sa projection sur E_1.

A tout $h \in E$, on associe la série formelle en z :

$$< \alpha\ z,\ h > = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int P_{x^n, x^n} (d\omega^n)\ dx^n\ \alpha(\omega^n)\ h(\omega^n) \qquad (1\text{-}18)$$

Lemme 1-2. L'application $h \to < \alpha\ z, h >$ est un homomorphisme de l'algèbre E dans l'algèbre des séries formelles en z.

Démonstration. C'est la même qu'en mécanique classique [9]. Le seul point non trivial est de prouver que si $h = h_1 * h_2$, alors

$$< \alpha z, h > = < \alpha z, h_1 > < \alpha z, h_2 > \qquad (1\text{-}19)$$

Or

$$< \alpha z, h > = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int P_{x^n, x^n}(d\omega^n)\, dx^n\, \alpha(\omega^n) \sum_{\omega^s \subset \omega^n} h_1(\omega^s)\, h_2(\omega^{n-s}) \qquad (1\text{-}20)$$

Pour chaque s, la dernière somme donne C_n^s termes dont les contributions sont égales.

$$< \alpha z, h > = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \frac{z^n}{s!(n-s)!} \int P_{x^n, x^n}(d\omega^n)\, dx^n\, \alpha(\omega^n)\, h_1(\omega^s)\, h_2(\omega^{n-s}) \qquad (1\text{-}21)$$

$$= < \alpha z, h_1 > < \alpha z, h_2 > \qquad (1\text{-}22)$$

On appelle E_z l'espace des séries entières en z à coefficients dans E. E_z est muni d'une structure d'algèbre commutative par une extension triviale du produit $*$. Pour tout $\alpha \in E_1$ et satisfaisant (1-16), on définit une application linéaire de E dans E_z par

$$h \in E \rightarrow < \alpha z, D h > \in E_z \qquad (1\text{-}23)$$

où $< \alpha z, D h > (X) = < \alpha z, D_X h >$ (1-24)

Lemme (1-3). L'application $h \rightarrow < \alpha z, D h >$ est un homomorphisme de E dans E_z.

Démonstration. Soit $h = h_1 * h_2 \in E$.

$$< \alpha\, z,\ D\, h > (X) = < \alpha\, z,\ D_X\, h_1 * h_2 > \tag{1-25}$$

$$= \sum_{Y \subset X} < \alpha\, z,\ D_Y\, h_1 * D_{X-Y}\, h_2 > \tag{1-26}$$

d'après (1-14)

$$\ldots = \sum_{Y \subset X} < \alpha\, z,\ D_Y\, h_1 > < \alpha\, z,\ D_{X-Y}\, h_2 > \tag{1-27}$$

d'après le lemme (1-2).

$$= (< \alpha\, z,\ D\, h_1 > * < \alpha\, z,\ D\, h_2 >)\ (X) \tag{1-28}$$

en vertu des définitions. Le lemme en résulte immédiatement.

Une conséquence immédiate du lemme est que, pour tout $h \in E^+$:

$$< \alpha\, z,\ D\ (\Gamma h) > = \Gamma < \alpha z,\ D\, h > \tag{1-29}$$

Soit maintenant $U = (U(\omega^m),\ m = 0,\ 1\ldots)$ une suite de fonctions réelles $U(\omega^m)$ ont chacune est continue sur le complémentaire de $\mathfrak{F}_m$, et satisfaisant

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U(\omega^m) \geq - m\, \beta\, B \end{cases} \tag{1-30}$$

où B est une constante réelle positive ou nulle, et soit $f = (f(\omega^m),\ m = 0,1..)$ avec

$$f\ (X) = \exp\ \left[- U(X)\right] \tag{1-31}$$

Il résulte de (1-30) et (Δ1) que $f \in E$.

Physiquement, U(X) représente l'interaction de m particules. Si on se restreint à des interactions à deux corps, U est donné par (I-3-15), mais cette restriction n'est pas nécessaire au stade actuel.

Λ et $\alpha_\Lambda(\omega)$ étant définis comme dans la section (I-3) et les $\mathfrak{F}_m$ étant choisis comme dans la remarque (R1) de la présente section, et en particulier tels que $\alpha_\Lambda(\omega) \in E_1$, on définit la fonction de partition correspondant à l'interaction U et au volume V par :

$$Z = < \alpha_\Lambda z, f > \tag{1-32}$$

Cette définition coïncide avec (I-3-26) : il résulte de (1-30) que Z est une fonction entière de z satisfaisant $Z(0) = 1$. Son logarithme est donc holomorphe au voisinage de l'origine, et on a

$$Z = \exp < \alpha_\Lambda z, g > \tag{1-33}$$

avec

$$g = \Gamma^{-1} f \tag{1-34}$$

On définit les MDR comme les composantes de $\bar{\rho}_\Lambda = J \rho_\Lambda \in \bar{E}$, où $\rho_\Lambda = (\rho_\Lambda(\omega^m), m = 0, 1, \ldots) \in E$ est défini par :

$$\rho_\Lambda(\omega^m) = \alpha_\Lambda(\omega^m)\, z^m\, \psi_\Lambda(\omega^m) \tag{1-35}$$

$$\psi_\Lambda(X) = Z^{-1} < \alpha_\Lambda\ z, D_X f > \tag{1-36}$$

En particulier $\psi_{\Lambda 0} = \rho_{\Lambda 0} = 1$, donc ρ_Λ et ψ_Λ sont dans $\mathbb{1} + E^+$. On pose $\rho_\Lambda = \mathbb{1} + \rho_\Lambda^+$. Les définitions (1-35), (1-36) reproduisent (I-3-28). On définit maintenant $\tilde{\phi}_X \in E$, χ_Λ et $\phi_\Lambda \in E^+$ par

$$\tilde{\phi}_X = f^{-1} * D_X f \tag{1-37}$$

$$\rho_\Lambda = \Gamma\, \chi_\Lambda \tag{1-38}$$

$$\psi_\Lambda = \Gamma\, \phi_\Lambda \tag{1-39}$$

Ces quantités satisfont les relations :

$$\psi_\Lambda(X) = < \alpha_\Lambda\, z,\ \tilde{\phi}_X > \tag{1-40}$$

$$\chi_\Lambda(X) = \alpha_\Lambda(X)\ z^m\ \phi_\Lambda(X) \tag{1-41}$$

$$\phi_\Lambda(X) = < \alpha_\Lambda\, z,\ D_X\, g > \text{ pour } m \geq 1 \tag{1-42}$$

$$\tilde{\phi}_\omega = D_\omega\, g \tag{1-43}$$

(1-40) est une conséquence immédiate de (1-36) et du lemme (1-2). (1-41) est une conséquence immédiate de (1-35, 38, 39) et de la définition de Γ. (1-42) résulte du lemme (1-3). En effet

$$Z\ \psi_\Lambda = < \alpha\, z,\ D\, f > = \Gamma(< \alpha\, z,\ D\, g >) \tag{1-44}$$

d'où, en appliquant Γ^{-1} aux deux membres :

$$< \alpha\, z,\ D\, g > = \phi_\Lambda + (\text{Log } Z)\ \mathbb{1} \tag{1-45}$$

(1-43) s'obtient par calcul direct à partir de (1-37).

On définit enfin $\bar{\chi}_\Lambda$ par $\bar{\chi}_\Lambda = J\ \chi_\Lambda$, ou encore

$$\bar{\rho}_\Lambda = \bar{\Gamma}\ \bar{\chi}_\Lambda \tag{1-46}$$

On se limite maintenant aux systèmes de particules interagissant par un potentiel à deux corps satisfaisant les conditions (A), (B) ou (B'), et (D), de (I-1). U est alors donné par (I-3-15). Si dans la définition de $\tilde{\phi}_X(Y)$, on isole la contribution d'une des m trajectoires de X, par exemple ω_1, on obtient une relation de récurrence qui exprime $\tilde{\phi}_X(Y)$ en fonction de $\tilde{\phi}_{X'}(Y')$ pour des (X',Y') qui contiennent au total une trajectoire de moins que (X,Y). Plus précisément, on pose :

$$F_1(X) = \sum_{j=2}^{m} \int_0^\beta \Phi(\omega_1(t) - \omega_j(t))\, dt \tag{1-47}$$

$$K(\omega_1,S) = \prod_{\omega \in S} \left\{ \exp\left[- \int_0^\beta \Phi(\omega_1(t) - \omega(t))\, dt \right] - 1 \right\} \qquad (1\text{-}48)$$

(1-37) peut alors s'écrire :

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \sum_{T \subset Y} f^{-1}(T)\, D_X\, f(Y-T) \qquad (1\text{-}49)$$

$$= \sum_{T \subset Y} \exp\left[- F_1(X) \right] f^{-1}(T) \sum_{S \subset Y-T} K(\omega_1,S)\, f(X'+Y-T) \qquad (1\text{-}50)$$

où X' est obtenu à partir de X en enlevant ω_1.

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \exp\left[- F_1(X) \right] \sum_{S \subset Y} K(\omega_1,S) \sum_{T \subset Y-S} f^{-1}(T)\, f(X' + Y - T) \qquad (1\text{-}51)$$

Mais la dernière somme n'est autre que $\tilde{\phi}_{X'+S}\,(Y-S)$. Finalement :

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \exp\left[- F_1(X) \right] \sum_{S \subset Y} K(\omega_1,S)\, \tilde{\phi}_{X'+S}\,(Y - S) \qquad (1\text{-}52)$$

Ces relations peuvent être considérées comme la forme non intégrée d'équations intégrales qu'on établira au chapitre III, et qui sont les analogues quantiques des équations de Kirkwood-Salzburg.

Un calcul analogue au précédent donne facilement les relations

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \exp\left[- U(X) \right] \sum_{S \subset Y} K(X,S)\, \tilde{\phi}_S(Y - S) \qquad (1\text{-}53)$$

où $K(X,S) = \prod_{\omega \in S} \left\{ \exp\left[- \int_0^\beta dt \sum_{j=1}^{m} \Phi(\omega_j(t) - \omega(t)) \right] - 1 \right\}$ (1-54)

Ces relations peuvent être considérées comme la forme non integrée des analogues quantiques des équations de Mayer-Montroll [19].

On obtient comme conséquence immédiate des équations (1-52) un résultat sur le signe des coefficients du développement de la densité en série de z pour des potentiels purement répulsifs, analogue à celui obtenu par Groeneveld [4] en mécanique classique.

Lemme (1-4). Soit $Y = \omega^n$ et $\Phi \geq 0$. Alors $\tilde{\phi}_X(Y)$ a le signe de $(-)^n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur m + n en utilisant (1-52). Pour m + n = 1, ou bien m = 1, n = 0, $\tilde{\phi}_1(0) = 1$.

ou bien m = 0, n = 1, $\tilde{\phi}_0(1) = 0$.

D'autre part, $K(\omega_1, S)$ a le signe de $(-)^s$, d'où le résultat.

Théorème (1-1). Dans le développement de $\rho_\Lambda(\omega^m)$ et de $\bar{\rho}_\Lambda(x^m, y^m)$ en série de z, pour un potentiel purement répulsif, le coefficient de z^{m+n} a le signe de $(-)^n$. En particulier, dans le développement de Mayer de la densité en série de z, le coefficient de z^ℓ a le signe de $(-)^{\ell+1}$.

Le théorème est une conséquence immédiate du lemme (1-4) et de (1-35), (1-36) et (1-40).

2 - STATISTIQUES QUANTIQUES

Cette section présente le cadre mathématique approprié au cas (SQ) et suit le même plan que la précédente. Comme dans cette dernière, l'espace des trajectoires est toujours muni de la topologie de la convergence uniforme.

Les variables sont maintenant des trajectoires dont la longueur, définie comme la longueur de l'intervalle de variation du paramètre, est $j\beta$, où j est un entier, $j \geq 1$. Les suites finies de telles trajectoires sont notées X, Y, etc., ou (ω^m, j^m). Cette dernière notation signifie que la trajectoire ω_k a la longueur $j_k\beta$, pour $k = 1,\ldots, m$. On aura lieu de se restreindre à des fonctions de (ω^m, j^m) totalement symétriques par rapport à leurs m arguments. L'ordre de ceux-ci étant alors sans intérêt, les variables j^m seront décrites de façon suffisante par une partition de m en entiers γ_k tels que $\sum \gamma_j = m$, indiquant que j figure γ_j fois dans j^m. On a vu dans la section (I-3) que ces $\gamma = (\gamma_j)$ peuvent être associées à des classes de permutations de $|\gamma| = \sum j\,\gamma_j$ variables formées de γ_j cycles de j éléments (j = 1, 2,...). On utilisera systématiquement par la suite les notations suivantes.

$$X = (\omega^m, j^m) = \omega^\gamma, \ \sum \gamma_j = m \quad , \qquad |\gamma| = \sum j\,\gamma_j = q$$

$$Y = (\omega^n, j^n) = \omega^\delta, \ \sum \delta_j = n \quad , \qquad |\delta| = \sum j\,\delta_j = r$$

$\gamma = \gamma' + \gamma''$ signifie $\gamma_j = \gamma'_j + \gamma''_j$ pour tout j.

$\gamma' \leq \gamma$ signifie $\gamma'_j \leq \gamma_j$ pour tout j.

Si $\gamma' \leq \gamma, \gamma - \gamma'$ est la partition γ'' définie par $\gamma''_j = \gamma_j - \gamma'_j$ pour tout j.

On appelle S^{j^m} l'espace des trajectoires (ω^m, j^m) continues. On définit tout d'abord un espace vectoriel complexe de suites de fonctions continues de familles de trajectoires. Pour cela :

1) On se donne, pour tout j^m un sous ensemble $\mathfrak{F}_{j^m}$ de S^{j^m} possédant les propriétés suivantes :

($\mathfrak{F}$1) $\mathfrak{F}_{j^m}$ est fermé.

($\mathfrak{F}$2) $\mathfrak{F}_{j^m}$ est de $P^{j^m}_{x^m,y^m}$- mesure nulle pour tout $x^m \notin F_m$, $y^m \notin F_m$, où

F_m est défini par (1-1)

($\mathcal{F}3$) Si une sous famille (ω^n, j^n) de (ω^m, j^m) est dans $\mathcal{F}_{j^n}$, alors (ω^m, j^m) est dans $\mathcal{F}_{j^m}$.

($\mathcal{F}4$) Pour tout $(\omega^m, j^m) \notin \mathcal{F}_{j^m}$, et tout $k^n = (k_1, \ldots k_n)$, l'ensemble des $(\overline{\omega}^n, k^n)$ tels que $(\omega^m, j^m ; \overline{\omega}^n, k^n) \in \mathcal{F}_{j^m, k^n}$ est de $P^{k^n}_{x^n, x^n}$-mesure nulle pour presque tout x^n.

($\mathcal{F}5$) La relation $(\omega^m, j^m) \in \mathcal{F}_{j^m}$ est invariante par toute permutation des (ω, j).

2) On se donne également une suite de fonctions d'une trajectoire de longueur j $\beta(j = 1, \ldots)$ $\Delta(\omega, j)$, satisfaisant les conditions suivantes :

($\Delta 1$) $\Delta(\omega, j)$ est définie sur S^j, réelle, continue, et $\inf_{\omega(j)} \Delta(\omega, j) > 0$.

($\Delta 2$) Pour η positif assez petit, il existe une suite de fonctions réelles positives $\Delta_\eta(\omega, j)$, $P^j_{x,y}$- intégrables pour tout (x,y), et telle que $\|\omega - \omega'\| \leq \eta$ entraîne $\Delta(\omega') \leq \Delta_\eta(\omega)$.

($\Delta 3$) La série $\sum_{j=1}^{\infty} \int P^j_{x,y} (d\omega)\, \Delta(\omega, j)$ converge uniformément en x et y vers une fonction bornée $g(x,y)$.

On pose $\Delta(X) = \prod_{k=1}^{m} \Delta(\omega_k, j_k)$ et on définit $\Delta_\eta(X)$ de façon analogue.

On appelle E_γ l'espace des fonctions h de m trajectoires (ω^γ), définies et continues sur le complémentaire des $\mathcal{F}_{j^m}$ appropriés, totalement symétriques par rapport à leurs arguments, et telles que $|h(\omega^\gamma)| \,/\, \Delta(\omega^\gamma)$ soit bornée quand ω^γ varie pour γ fixé. On appelle E l'espace des suites de telles fonctions $h = (h(\omega^\gamma))$, telles que $h(\omega^\gamma) \in E_\gamma$ pour tout γ.
On appelle G le sous espace de E formé des $h \in E$ qui satisfont la condition suivante :

(g) $|h(X)|/\Delta(X)$ est majoré uniformément en X pour m fixé.

La composante m = 0 de $h \in E$ (ou $\in G$) est un scalaire complexe h_0. On appelle E^+ (respectivement G^+) le sous espace des $h \in E(G)$ pour lesquels $h_0 = 0$.

Les remarques (R 1 → 4) de la section (1) s'appliquent au cas présent avec quelques modifications :

(R1). L'exemple des $\mathfrak{F}_{j^m}$ qui sera utilisé par la suite est le suivant :

$$\mathfrak{F}_j = \Big\{(\omega,j) : (\omega,j) \subset \overline{\Lambda}\text{ , mais } (\omega,j) \not\subset \Lambda\text{ , ou : pour au moins un couple } (k,\ell) \text{ avec } 0 \leq k < \ell \leq j-1\text{, la portion de trajectoire } \omega(t+k\beta) - \omega(t+\ell\beta)\text{, avec } 0 \leq t \leq \beta \text{ rencontre F ou rencontre la frontière du coeur dur sans pénétrer dans celui-ci}\Big\}$$

$$\mathfrak{F}_{j_1,j_2} = \Big\{(\omega_1,j_1 ; \omega_2,j_2) : (\omega_1,j_1) \in \mathfrak{F}_{j_1} \text{ ou } (\omega_2,j_2) \in \mathfrak{F}_{j_2} \text{ ou pour au moins un couple } (k_1,k_2) \text{ avec } 0 \leq k_1 \leq j_1-1\text{ , } 0 \leq k_2 \leq j_2-1\text{ , la portion de trajectoire } \omega_1(t+k_1\beta) - \omega_2(t+k_2\beta) \quad (0 \leq t \leq \beta) \text{ rencontre F ou rencontre la frontière du coeur sans pénétrer dans celui-ci}\Big\}$$

$$\mathfrak{F}_{j^m} = \Big\{(\omega^m,j^m) : (\omega_k,j_k ; \omega_\ell,j_\ell) \in \mathfrak{F}_{j_k\, j_\ell} \text{ pour au moins un couple } (k,\ell)\Big\}$$

La vérification des propriétés ($\mathfrak{F}$1-5) se fait comme précédemment en utilisant les lemmes de la section (I-2).

On appelle $\alpha_\Lambda(\omega,j)$ (et plus brièvement $\alpha_\Lambda(\omega)$ si aucune confusion n'est possible la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathfrak{S}^j_\Lambda$ des trajectoires continues de longueur $j\beta$ contenues dans Λ; et on pose

$$\alpha_\Lambda(X) = \prod_{k=1}^{m} \alpha_\Lambda(\omega_k,j_k) \qquad (2\text{-}1)$$

Le choix précédent des $\mathfrak{F}$ assure que les fonctions $\alpha_\Lambda(\omega^\gamma)$ et $f(\omega^\gamma) = \exp\big[-U(\omega^\gamma)\big]$ sont dans E_γ pour tout γ.

(R2). Les fonctions Δ les plus simples satisfaisant (Δ1), (Δ2), (Δ3) sont de la forme $\Delta(\omega,j) = \xi^j$, où ξ est une constante réelle, $0 < \xi < 1$. Elles seront utilisées en l'absence de coeur dur.

(R3). Les conditions ($\mathfrak{G}$1,2) et (Δ1,2) entraînent le résultat suivant :

Lemme (2-1). Si $f \in E_\gamma$ et si $x^m \notin F_m, y^m \notin F_m$, alors f est $P^{j^m}_{x^m,y^m}$- intégrable et l'intégrale $\int P^{j^m}_{x^m,y^m}(d\omega^m)\, f(\omega^\gamma) = \overline{f}(x^m,y^m)$ est une fonction continue de (x^m,y^m).

La démonstration est la même que précédemment. Il résulte du lemme (2-1) et de (Δ 2,3) que g(x,y) est une fonction continue de (x,y).

(R4). La propriété ($\mathfrak{G}$3) a pour but d'assurer que si $f(X) \in E_\gamma$, $g(Y) \in E_\delta$, alors $f(X)\, g(Y) \in E_{\gamma+\delta}$.

On définit maintenant une structure d'algèbre sur E en définissant un produit $*$ par $(h_1,h_2) \to h = h_1 * h_2$

$$h(X) = \sum_{Y \subset X} h_1(Y)\, h_2(X-Y) \qquad (2\text{-}2)$$

où la sommation porte sur toutes les sous suites de X. Il est clair que si les composantes h_1 et h_2 sont des fonctions symétriques de leurs arguments, il en est de même de celles de h. E muni du produit $*$ devient une algèbre commutative. D'autre part, G est une sous algèbre de E. La vérification résulte immédiatement du lemme suivant, qui entraîne que si h_1 et h_2 satisfont la condition (g), $h = h_1 * h_2$ la satisfait aussi :

Lemme (2-2). Soit $\begin{cases} h_1 \in G, & |h_1(X)| \leq \sigma_{1m}\, \Delta(X) \\ h_2 \in G & |h_2(X)| \leq \sigma_{2m}\, \Delta(X) \end{cases}$ (2-3)

où (σ_{1j}) et (σ_{2j}) sont deux suites de nombres réels positifs, et soit $h = h_1 * h_2$

alors $$|h(X)| \leq \sigma_m \Delta(X) \tag{2-4}$$

avec $$\sigma_m = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \ \sigma_{1p} \ \sigma_{2,m-p} \tag{2-5}$$

Démonstration. $$|h(X)| \leq \sum_{S \subset X} |h_1(S)| \ |h_2(X-S)| \tag{2-6}$$

$$= \sum_{\omega^{\gamma'} \subset \omega^{\gamma}} |h_1(\omega^{\gamma'})| \ h_2(\omega^{\gamma-\gamma'})| \tag{2-7}$$

$$\leq \Delta(X) \sum_{\gamma' \leq \gamma} \prod_j C^{\gamma' j}_{\gamma_j} \ \sigma_{1m'} \ \sigma_{2,m-m'} \tag{2-8}$$

où $m' = \sum \gamma'_j$. La dernière somme de (2-8) peut s'écrire

$$\sum_{m'=0}^{m} \sigma_{1m'} \ \sigma_{2m-m'} \times \text{coefficient de } z^{m'} \text{ dans } \sum_{\gamma' \leq \gamma} \prod_j (C^{\gamma' j}_{\gamma_j} \ z^{\gamma' j}) \tag{2-9}$$

La dernière somme de (2-9) est le produit des contributions des différents j et chacune d'elles se réduit à $(1 + z)^{\gamma_j}$. Leur produit est $(1+z)^m$ d'où le lemme.

L'algèbre E admet une unité $\mathbb{1} = (1,0,0,\ldots)$. On définit une application Γ de E^+ dans $\mathbb{1} + E^+$ comme l'* exponentielle. Γ applique E^+ sur $\mathbb{1} + E^+$ et a un inverse unique Γ^{-1}. On étend facilement Γ en une application biunivoque de E sur E comme précédemment. L'application Γ envoie G^+ dans $\mathbb{1} + G^+$ biunivoquement. Pour le montrer, il suffit de vérifier que si $h \in E^+$ et h satisfait la condition (g), alors Γh la satisfait aussi. Ceci résulte du lemme (2-2) et du fait que seuls contribuent à Γ h(X) les m premiers termes de la série exponentielle. On peut préciser ce point. Soit $h \in G^+$. $h_0 = 0$, et h satisfait

$$|h(X)| \leq \sigma_m \Delta(X) \tag{2-10}$$

Il résulte du lemme (2-2) que

$$h^{*k}(X) \leq \Delta(X) \sum_{(m_r)} \sigma_{m_1} \dots \sigma_{m_k} \frac{m!}{m_1! \dots m_k!} \tag{2-11}$$

où la dernière somme porte sur les partitions de m en k entiers $m = m_1 + \dots + m_k$ tels que $m_r \geq 1$ pour tout r ($1 \leq r \leq k$). La dernière restriction est due à $h_0 = 0$. Elle entraîne en particulier que le second membre de (2-11) est nul pour $m < k$. Alors

$$|\Gamma h(X)| \leq \Delta(X) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{(m_r)} \sigma_{m_1} \dots \sigma_{m_k} \frac{m!}{m_1! \dots m_k!} \tag{2-12}$$

où la série est en fait une somme finie grâce à la condition $k \leq m$. Pour h fixé, c'est-à-dire pour (σ) fixé, elle ne dépend que de m. Donc Γh satisfait la condition (g) et $\Gamma h \in G$. On montre de façon analogue que Γ envoie G^+ <u>sur</u> $\mathfrak{A} + G^+$.

On définit ensuite des dérivations dans E par

$$D_{(\omega,k)}\, h(\omega^m, j^m) = h(\omega, k\, ;\, \omega^m, j^m) \tag{2-13}$$

$$D_X\, h = D_{(\omega_1 j_1)} \cdots D_{(\omega_m j_m)}\, h \tag{2-14}$$

Comme les $h \in E$ sont des fonctions symétriques de leurs arguments, les dérivations commutent entre elles. Comme dans le cas (SB), D est linéaire et satisfait :

$$D_{(\omega,k)}\, h_1 * h_2 = (D_{(\omega,k)} h_1) * h_2 + h_1 * D_{(\omega,k)} h_2 \tag{2-15}$$

$$D_{(\omega,k)}\, \Gamma h = D_{(\omega,k)} h * \Gamma h \tag{2-16}$$

$$D_X\, (h_1 * h_2) = \sum_{Y \subset X} D_Y\, h_1 * D_{X-Y}\, h_2 \tag{2-17}$$

On considère maintenant les deux espaces vectoriels complexes $\overline{E}_\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) des suites de fonctions de m paires de points de R^ν, $\overline{h} = (\overline{h}\ (x^m, y^m),\ m = 0, 1, \ldots)$ où $\overline{h}(x^m, y^m)$ est définie et continue pour $x^m \notin F_m$, $y^m \notin F_m$, et totalement ε-symétrique par rapport aux x et aux y séparément. Il est naturel[20, 21] de définir un produit $*_\varepsilon$ dans $\overline{E}_\varepsilon$ par $(\overline{h}_1, \overline{h}_2) \to \overline{h} = \overline{h}_1 *_\varepsilon \overline{h}_2$:

$$\overline{h}\ (\overline{X}) = \sum_{\overline{S} \subset \overline{X}} \varepsilon^{\overline{S}}\ h_1(\overline{S})\ h_2(\overline{X}-\overline{S})$$

où $\overline{X} = (x^m, y^m)$

$\overline{S} = (x^s, y^s)$ est obtenu en prélevant de façon indépendante s variables x dans x^m et s variables y dans y^m. $(\overline{X} - \overline{S})$ est formé des m-s variables restantes. Les variables sont dans le même ordre dans $\overline{S}$ et dans $(\overline{X} - \overline{S})$ que dans $\overline{X}$.

$\varepsilon^{\overline{S}}$ est égal à + 1 si $\varepsilon = +1$, et à la signature du produit des permutations qui transforment respectivement x^m en (x^s, x^{m-s}) et y^m en (y^s, y^{m-s}), si $\varepsilon = -1$.

Il est facile de vérifier que $\overline{E}_\varepsilon$ muni de ce produit est une algèbre commutative avec une unité $\overline{1} = (1, 0, 0 \ldots)$. On appelle $\overline{E}^+_\varepsilon$ le sous espace des $\overline{h} \in \overline{E}_\varepsilon$ pour lesquels $\overline{h}_0 = 0$ et on définit une application Γ_ε de $\overline{E}^+_\varepsilon$ dans $\overline{1} + \overline{E}^+_\varepsilon$ comme l'$*_\varepsilon$-exponentielle. On a par exemple, pour $\overline{h} \in \overline{E}^+_\varepsilon$

$$\begin{cases} (\Gamma_\varepsilon\ \overline{h})_0 = 1 \\ (\Gamma_\varepsilon\ \overline{h})\ (x,y) = \overline{h}\ (x,y) \\ (\Gamma_\varepsilon\ \overline{h})\ (x_1\ x_2\ ;\ y_1\ y_2) = \overline{h}\ (x_1\ x_2\ ,\ y_1\ y_2) + \overline{h}\ (x_1, y_1)\ \overline{h}(x_2\ y_2) + \varepsilon \overline{h}(x_1 y_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times\ \overline{h}\ (x_2\ y_1) \end{cases} \tag{2-19}$$

etc.

Γ_ε est biunivoque de $\overline{E}^+_\varepsilon$ sur $\overline{1} + \overline{E}^+$ et a un inverse unique Γ_ε^{-1}.

On définit maintenant deux applications linéaires J_ε dont on montrera ensuite qu'elles sont définies dans G et à valeurs dans $\bar{E}_\varepsilon$, par

$h \in G \to \bar{h}_\varepsilon = J_\varepsilon h \in \bar{E}_\varepsilon$:

$\bar{h}_{\varepsilon 0} = h_0$

$$\bar{h}_\varepsilon (x^m, y^m) = \left(\sum_\pi \varepsilon^\pi \Pi \right)_m \sum_{j^m} \varepsilon^{q+m} \int P^{j^m}_{x^m, y^m} (d\omega^m)\ h(\omega^m, j^m) \qquad (2\text{-}20)$$

avec les notations de la section (I-3)

Il résulte du lemme (2-1) que chaque terme de la série existe et est une fonction continue de (x^m, y^m) pour $x^m \notin F_m, y^m \notin F_m$. D'autre part, $h \in G$, donc il existe une suite $\sigma = (\sigma_m)$ de nombres réels positifs tels que

$$|h(X)| \leq \sigma_m \Delta(X) \qquad (2\text{-}21)$$

Par suite, la série dans (2-20) est majorée terme à terme par la série

$$\sigma_m \sum_{j^m} \int P^{j^m}_{x^m, y^m} (d\omega^m)\ \Delta(\omega^m, j^m) \qquad (2\text{-}22)$$

$$= \sigma_m \prod_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} \int P^{j}_{x_k, y_k} (d\omega)\ \Delta(\omega, j) \qquad (2\text{-}23)$$

$$= \sigma_m \prod_{k=1}^{m} g(x_k, y_k) \qquad (2\text{-}24)$$

En vertu de (Δ3), la série (2-23), donc la série (2-20), converge uniformément en (x,y). Par suite, la somme existe et est une fonction continue de (x^m, y^m), donc J_ε est défini dans G entier, et a valeurs dans $\bar{E}_\varepsilon$. De plus

$$|\bar{h}_\varepsilon (\bar{X})| \leq m!\ \sigma_m \| g \|^m_\infty \qquad (2\text{-}25)$$

Les applications J_ε possèdent la propriété suivante :

Théorème (2-1). J_ε est un homomorphisme de l'algèbre G dans l'algèbre $\bar{E}_\varepsilon$.

Démonstration. Le seul point non trivial consiste à montrer que si h_1, $h_2 \in E$, alors

$$J_\varepsilon (h_1 * h_2) = (J_\varepsilon h_1) *_\varepsilon (J_\varepsilon h_2) \qquad (2\text{-}26)$$

Soit $\overline{X} = (x^m, y^m)$

$$J_\varepsilon(h_1 * h_2)\ (\overline{X}) = \left(\sum_\pi \varepsilon^\pi \Pi\right) \sum_{m\, j^m} \varepsilon^{q+m} \int P^{j^m}_{x^m, y^m} (d\omega^m) \sum_{S \subset X} h_1(S)\ h_2(X-S) \qquad (2\text{-}27)$$

On peut oublier la somme sur j^m qui ne joue aucun rôle ici. Le choix de $S \subset X$ est équivalent au choix d'une sous famille x^s de x^m, qui sera la partie x d'un $\overline{S}$. x^s étant choisie, toute permutation π_m des y est d'une façon et d'une seule le produit de trois permutations : $\pi_m = \pi_s\, \pi_{m-s}\, \pi'$, où π_s et π_{m-s} sont des permutations des sous familles y^s et y^{m-s} de y^m qui seront mises en correspondance avec les x^s et x^{m-s} respectivement, et où π' est la permutation qui amène ces sous familles en regard sans changer l'ordre relatif des y à l'intérieur de chacune d'elles. On voit alors facilement que $\varepsilon^{\overline{S}}$ n'est autre que $\varepsilon^{\pi'}$.

Les sommes sur π_s et π_{m-s} pour π' fixé, jointes à la somme sur j^m et à l'intégration, appliquées à $h_1(S)$ et $h_2(X-S)$, donnent respectivement $J_\varepsilon\, h_1(\overline{S})$ et $J_\varepsilon\, h_2(\overline{X} - \overline{S})$. D'autre part, la somme sur S et sur π' donne la définition du produit $*_\varepsilon$. Le théorème en résulte immédiatement.

Une conséquence immédiate du théorème (2-1) est la commutativité du diagramme ci-contre.

$$\begin{array}{ccc} G^+ & \xrightarrow{\Gamma} & G \\ \downarrow J_\varepsilon & & \downarrow J_\varepsilon \\ \overline{E}^+_\varepsilon & \xrightarrow{\Gamma_\varepsilon} & \overline{E}_\varepsilon \end{array}$$

Soit maintenant $(\alpha_j(\omega,j), j = 1,2,\ldots)$ une suite de fonctions $\alpha_j \in E_j$ telles que

$$\int P^j_{xx}\ (d\omega)\ dx\, |\ \alpha_j(\omega,j)|\Delta(\omega,j) < +\infty \qquad (2\text{-}28)$$

On notera plus simplement $\alpha_j(\omega,j) = \alpha_j(\omega)$. Soit $\alpha = (\alpha(X)) \in E$ défini par

$$\alpha_0 = 1 \ , \quad \alpha(\omega^m, j^m) = \prod_{k=1}^{m} \alpha_{j_k}(\omega_k) \tag{2-29}$$

A tout $h \in E$ on associe la série formelle en z

$$< \alpha\, z,\, h >_\varepsilon \ = \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \ \alpha(\omega^\delta)\ h(\omega^\delta) \tag{2-30}$$

où les notations sont définies par (I-3-45) et seq.

L'application $h \to < \alpha\, z,\, h >_\varepsilon$ possède la propriété suivante :

Lemme (2-3). L'application $h \to < \alpha z,\, h >_\varepsilon$ est un homomorphisme de l'algèbre E dans l'algèbre des séries formelles en z.

Démonstration : le seul point non trivial consiste à montrer que si $h_1 \in E$, $h_2 \in E$, $h = h_1 * h_2$, alors

$$< \alpha\, z,\, h >_\varepsilon \ = < \alpha\, z,\, h_1 >_\varepsilon < \alpha\, z, h_2 >_\varepsilon \tag{2-31}$$

Or

$$< \alpha\, z,\, h >_\varepsilon \ = \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \ \alpha(\omega^\delta) \sum_{\omega^{\delta'} \subset \omega^\delta} h_1(\omega^{\delta'})\ h_2(\omega^{\delta-\delta'}) \tag{2-32}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \sum_{\delta' \leq \delta} \alpha(\omega^{\delta'})\ \alpha(\omega^{\delta-\delta'}) \prod_j C_{\delta_j}^{\delta'_j}\ h_1(\omega^{\delta'})\ h_2(\omega^{\delta-\delta'}) \tag{2-33}$$

Mais, d'après (I-3-46)

$$\prod_j C_{\delta_j}^{\delta'_j}\ d_\varepsilon \omega^\delta = d_\varepsilon \omega^{\delta'}\ d_\varepsilon \omega^{\delta-\delta'} \tag{2-34}$$

Le lemme résulte alors immédiatement de (2-33), (2-34).

On définit comme précédemment l'espace E_z des séries entières à coefficients dans E et on muni E_z d'une structure d'algèbre commutative par une extension évidente du produit *. Pour toute suite $\alpha = (\alpha_j(\omega))$, $\alpha_j \in E_j$ et satisfaisant (2-28), on définit deux applications linéaires de E dans E_z par
$h \in E \to < \alpha z, D h >_\varepsilon \in E_z$ où

$$< \alpha z, D h >_\varepsilon (X) = < \alpha z, D_X h >_\varepsilon \qquad (2\text{-}35)$$

Lemme (2-4). $h \to < \alpha z, D h >_\varepsilon$ est un homomorphisme de E dans E_z.

La démonstration est la même que précédemment, elle n'utilise que la relation (2-17), la définition de Γ et le lemme précédent.

Une conséquence immédiate du lemme (2-4) est :

$$< \alpha z, D (\Gamma h) >_\varepsilon = \Gamma < \alpha z, D h >_\varepsilon \qquad (2\text{-}36)$$

Soit maintenant $U = (U(\omega^\gamma))$ une suite de fonctions réelles $U(\omega^\gamma)$ dont chacune est continue sur le complémentaire du $\mathfrak{F}_{j^m}$ adéquat, et satisfaisant

$$U_0 = 0 \quad , \quad U(\omega^\gamma) \geq - q\beta B \quad \text{pour } q \geq 1 \qquad (2\text{-}37)$$

où B est une constante réelle, $B \geq 0$, et soit $f = (f(\omega^\gamma))$ la suite des fonctions définie par

$$f(\omega^\gamma) = \exp \left[- U(\omega^\gamma) \right] \qquad (2\text{-}38)$$

U représente comme précédemment l'interaction d'un système de particules identiques, et se réduit à la forme (I-3-49) dans le cas d'interactions à deux corps. Λ et α_Λ, et les $\mathfrak{F}_{j^m}$, étant définies comme dans la remarque (R1) de cette section, on définit la fonction de partition correspondant au volume Λ, à l'interaction U, et à la statistique ε, par :

$$Z_\varepsilon = < \alpha_\Lambda z, f >_\varepsilon \qquad (2\text{-}39)$$

Cette définition coïncide avec (I-3-48). Il résulte de (2-37) que Z_ε est une fonction analytique de z pour $|z| < \exp(-\beta B)$ et satisfait $Z_\varepsilon(0) = 1$.

Son logarithme est donc analytique au voisinage de l'origine, et

$$Z_\varepsilon = \exp < \alpha_\Lambda z, g >_\varepsilon \qquad (2\text{-}40)$$

où
$$g = \Gamma^{-1} f \qquad (2\text{-}41)$$

On définit les MDR comme les composantes de $\bar{\rho}_\Lambda = J_\varepsilon \rho_\Lambda \in \bar{E}_\varepsilon$, où $\rho_\Lambda = (\rho_\Lambda(\omega^\gamma)) \in E$ est défini par

$$\rho_\Lambda(X) = \alpha_\Lambda(X)\, z^q\, \psi_\Lambda(X) \qquad (2\text{-}42)$$

$$\psi_\Lambda(X) = Z_\varepsilon^{-1} < \alpha_\Lambda z, D_X f >_\varepsilon \qquad (2\text{-}43)$$

On a donc $\psi_{\Lambda O} = \rho_{\Lambda O} = 1$, donc ρ_Λ et ψ_Λ sont dans $\mathbb{1} + E^+$. On pose

$$\rho_\Lambda = \mathbb{1} + \rho_\Lambda^+ \qquad (2\text{-}44)$$

Ces définitions reproduisent (I-3-47). On définit ensuite $\tilde{\phi}_X \in E$, χ_Λ et $\phi_\Lambda \in E^+$, par

$$\tilde{\phi} = f^{-1} * D_X f \qquad (2\text{-}45)$$

$$\rho_\Lambda = \Gamma\, \chi_\Lambda \qquad (2\text{-}46)$$

$$\psi_\Lambda = \Gamma\, \phi_\Lambda \qquad (2\text{-}47)$$

Ces quantités satisfont les relations

$$\psi_\Lambda(X) = < \alpha_\Lambda z, \tilde{\phi}_X >_\varepsilon \qquad (2\text{-}48)$$

$$\chi_\Lambda(X) = \alpha_\Lambda(X)\, z^q\, \phi_\Lambda(X) \qquad (2\text{-}49)$$

$$\phi_\Lambda(X) = < \alpha_\Lambda z, D_X g >_\varepsilon \quad \text{pour } q \geq 1 \qquad (2\text{-}50)$$

Ces relations sont des conséquences immédiates des définitions et des lemmes (2-3) et (2-4). On définit encore $\overline{\chi}_\Lambda$ par $\overline{\chi}_\Lambda = J_\varepsilon \chi_\Lambda$, ou

$$\overline{\rho}_\Lambda = \Gamma_\varepsilon \, \overline{\chi}_\Lambda \tag{2-51}$$

Cette définition, comme celle de $\overline{\rho}_\Lambda$, n'a de sens que si χ_Λ(respectivement ρ_Λ) est dans G, ce qui aura lieu, avec les hypothèses faites sur U, pour $|z|$ assez petit.

En combinant (2-42) et (2-48), on obtient le développement de $\rho_\Lambda$en série de z (cf. 22).

On se limite maintenant à des systèmes de particules interagissant par un potentiel à deux corps satisfaisant les conditions (A), (B) ou (B'), et (D) de (I-1). U est alors donné par (I-3-49). On obtient par un calcul analogue à celui de la section précédente une relation de récurrence sur les $\tilde{\phi}_X(Y)$ analogue à (1-52), et qui s'écrit :

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \exp\left[- F_1(X)\right] \sum_{S \subset Y} K(\omega_1, j_1 \, ; \, S) \, \tilde{\phi}_{X'+S}(Y-S) \tag{2-52}$$

où maintenant

$$F_1(X) = \int_0^\beta dt \left\{ \sum_{0 \le j < j' \le j_1 - 1} \Phi(\omega_1(t + j\beta) - \omega_1(t + j'\beta)) + \right.$$

$$\left. \sum_{k=2}^{m} \sum_{j=0}^{j_1-1} \sum_{j'=0}^{j_k-1} \Phi(\omega_1(t + j\beta) - \omega_k(t + j'\beta)) \right\} \tag{2-53}$$

$$K(\omega_1, j_1 \, ; \, S) = \prod_{(\omega,j) \in S} \left\{ \exp\left[- \int_0^\beta dt \sum_{\ell=0}^{j_1-1} \sum_{\ell'=0}^{j-1} \Phi(\omega_1(t+\ell\beta) - \omega(t+\ell'\beta)) \right] - 1 \right\}$$

(2-54)

De la même façon, les $\tilde{\phi}_X(Y)$ satisfont la relation de récurrence

$$\tilde{\phi}_X(Y) = \exp\left[-U(X)\right] \sum_{S \subset Y} K(X,S)\ \tilde{\phi}_S(X-S) \qquad (2\text{-}55)$$

où

$$K(X,S) = \prod_{(\omega,j) \in S} \left\{ \exp\left[- \int_0^\beta dt \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{j_k-1} \sum_{\ell'=0}^{j-1} \Phi(\omega_k(t+\ell\beta) - \omega(t+\ell'\beta)) \right] - 1 \right\} \qquad (2\text{-}56)$$

La démonstration est la même que précédemment.

On déduit immédiatement des équations (2-52), pour des potentiels purement répulsifs, le résultat suivant :

Lemme (2-5). Soit $\Phi \geq 0$. Alors $\tilde{\phi}_X(Y)$ a le signe de $(-)^n$

Démonstration . $K(\omega_1,j_1 ; S)$ a le signe de $(-)^s$, où s est le nombre de trajectoires dans S. On opère par récurrence sur m + n. Pour m + n = 1, ou bien m = 0, n = 1, et $\tilde{\phi}_0(\omega,j) = 0$; ou bien m = 1, n = 0 et $\tilde{\phi}_{\omega,j}(0) = \exp\left[-U(\omega,j)\right] \geq 0$. le lemme résulte alors immédiatement de (2-52).

Pour des fermions, ($\varepsilon = -1$) on obtient pour ρ_Λ la propriété suivante :

Lemme (2-6). Soit $\Phi \geq 0$ (potentiel purement répulsif) et $\varepsilon = -1$ (statistique de Fermi). Le coefficient de z^{q+r} dans le développement de $\rho_\Lambda(\omega^\gamma)$ en série de z a le signe de $(-)^r$.

Démonstration . (2-48) s'écrit

$$\psi_\Lambda(X) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \alpha_\Lambda(\omega^\delta) \tilde{\phi}_X(\omega^\delta) \qquad (2\text{-}57)$$

$d_\varepsilon \omega^\delta$ contient un facteur $\varepsilon^{\sum (j+1)\delta_j} = \varepsilon^{r+n}$, et $\tilde{\phi}_X(\omega^\delta)$ a le signe de $(-)^n$

Par suite, pour des bosons ($\varepsilon = + 1$), on ne peut pas conclure.

pour des fermions ($\varepsilon = - 1$), tous les termes d'un r donné ont le même signe et le coefficient de z^r a le signe de $(-)^r$, d'où le lemme.

Le développement de Mayer possède alors la propriété suivante :

Théorème (2-2). Dans le développement $\bar{\rho}_\Lambda(x,x) = \sum \ell \; b_\ell(\Lambda) \; z^\ell$, pour des fermions à interactions répulsives ($\varepsilon = - 1$, $\Phi \geq 0$) :

$b_\ell(\Lambda)$ a le signe de $(-)^{\ell+1}$.

$|b_\ell(\Lambda)| \geq |b^{(0)}_\ell(\Lambda)|$, où $b^{(0)}_\ell(\Lambda)$ correspond à un gaz de fermions libres à la même température.

Démonstration . On applique le lemme précédent à

$$\rho_\Lambda(\omega,j) = \rho_\Lambda(\omega) \; z^j \left[1 + \sum_1^\infty (-)^r \; z^r \times \text{coefficient positif}\right] \qquad (2\text{-}58)$$

$$\bar{\rho}_\Lambda(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (-)^{j+1} \int P^j_{xy} \; (d\omega) \; \rho_\Lambda(\omega,j) \qquad (2\text{-}59)$$

Tous les termes qui contribuent à une puissance donnée de z dans (2-59) ont le même signe, et le premier terme du dernier facteur de (2-58) est la partie qui correspond au gaz libre. Le théorème est donc démontré.

III - LES EQUATIONS DE KIRKWOOD-SALZBURG QUANTIQUES

Ce chapitre étudie les MDR, pour une interaction à deux corps, par la méthode suivante : on établit des équations intégrales satisfaites par les ρ_Λ qui sont les analogues quantiques des équations de Kirkwood-Salzburg et qu'on désigne donc par le même nom. On définit un espace de Banach convenable dans lequel cette famille d'équations peut être considérée comme une équation linéaire. Dans les conditions d'applicabilité du développement de Liouville-Neuman, cette équation a une solution unique et peut donc servir à définir ρ_Λ. Le point important est que cette méthode n'utilise pas explicitement le fait que le système est enfermé dans une région bornée. Elle constituera l'outil essentiel du passage à la limite du volume infini qui fera l'objet du chapitre suivant. Comme dans le chapitre II, les complications introduites par les statistiques quantiques conduisent à traiter séparément les cas (SB) et (SQ). Dans l'un et l'autre cas, la présence d'un coeur dur entraîne des complications techniques importantes. Par souci de clarté, chaque section est construite comme suit : on établit d'abord les équations de Kirkwood-Salzburg ; on les applique ensuite au cas où il n'y a pas de coeur dur. On traite enfin le cas général.

1 - EQUATIONS DE KIRKWOOD-SALZBURG DANS LE CAS (SB)

On suppose que le potentiel satisfait les conditions (A), (B) ou (B') et (D), de (I-1). Ceci assure la convergence de la série donnant ρ_Λ et la majoration (I-3-30). On aura à utiliser l'espace E de la section (II-1) correspondant au choix des $\mathfrak{G}_m$ décrit dans la remarque (R1) de cette section.

Dans la définition de $\rho_\Lambda(\omega^m)$, on met en évidence la contribution de la trajectoire ω_1. On pose $X = \omega^m$ et $X' = \omega^{m-1}$. X' s'obtient à partir de X en enlevant ω_1. $\rho_\Lambda$peut se mettre sous la forme :

$$\rho_\Lambda(X) = Z^{-1} \exp\left[-F_1(X)\right]\alpha_\Lambda(X) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{m+s}}{s!} \int P_{u^s,u^s} (d\bar{\omega}^s)\, du^s \quad \times$$

$$\alpha_\Lambda(\bar{\omega}^s) \sum_{\bar{\omega}^n \subset \bar{\omega}^s} K(\omega_1,\bar{\omega}^n) \exp\left[-U(\omega^{m-1},\bar{\omega}^s)\right] \qquad (1\text{-}1)$$

où F_1 et K sont définis respectivement par (II-1-47) et (II-1-48).

Tous les termes de la dernière somme qui correspondent au même n ont des contributions égales. On remplace donc cette somme par $\sum_{n\leq s} C_s^n$. On pose $r = s - n$.

$$\rho_\Lambda(X) = Z^{-1} \exp\left[-F_1(X)\right]\alpha_\Lambda(X) \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{s} \frac{z^{m+n+r}}{r!n!} \int P_{u^n,u^n} (d\bar{\omega}^n)\, du^n \quad \times$$

$$\alpha_\Lambda(\bar{\omega}^n)\, K(\omega_1,\bar{\omega}^n) \int P_{u^r,u^r} (d\bar{\omega}^r) du^r\, \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^r) \exp\left[-U(\omega^{m-1},\bar{\omega}^{n+r})\right] \qquad (1\text{-}2)$$

On regroupe les facteurs de façon à faire apparaître de nouveau ρ_Λ au second membre. On obtient finalement :

$$\rho_\Lambda(X) = z\, \alpha_\Lambda(\omega_1) \exp\left[-F_1(X)\right]\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int P_{u^n,u^n} (d\bar{\omega}^n)\, du^n \quad \times$$

$$K(\omega_1,\bar{\omega}^n)\, \rho_\Lambda(X',\bar{\omega}^n)\Big] \quad \text{pour } m > 1 \qquad (1\text{-}3)$$

$$\rho_\Lambda(\omega) = z\, \alpha_\Lambda(\omega) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int P_{u^n,u^n} (d\bar{\omega}^n)\, du^n\, K(\omega_1,\bar{\omega}^n)\, \rho_\Lambda(\bar{\omega}^n)\right] \qquad (1\text{-}4)$$

Le premier terme de la série qui figure dans (1-3) est simplement $\rho_\Lambda(\omega^{m-1})$.

La majoration (I-3-30) assure la convergence absolue des séries (1-2) et (1-3) et justifie donc les changements d'ordre des sommes et intégrales dans le calcul précédent.

On utilise maintenant la symétrie de $\rho_\Lambda(X)$ par rapport à ses m arguments ω_j pour symétriser l'équation (1-3). La méthode est la même qu'en mécanique classique [8]. La condition (D) peut s'écrire

$$\sum_{j=1}^{m} F_j(X) \equiv 2\, U(X) \geqslant -\, 2\, m\, \beta\, B \qquad (1\text{-}5)$$

où $F_j(X)$ est défini de façon analogue à $F_1(X)$ (II-1-47). Par suite, pour au moins un j :

$$F_j(X) \geqslant -\, 2\, \beta B \qquad (1\text{-}6)$$

Soit W_j^m le sous espace de $S^m - \mathcal{F}_m$ défini par $W_j^m = \left\{ \omega^m : F_j(\omega^m) \geqslant -\, 2\, \beta\, B \right\}$. (1-5) signifie que :

$$S^m - \mathcal{F}_m = \bigcup_{j=1}^{m} W_j^m \qquad (1\text{-}7)$$

Soit η_j la fonction caractéristique de W_j^m et soit $\theta_j = \eta_j / \sum_{j=1}^{m} \eta_j$. Alors $\sum_{j=1}^{m} \theta_j = 1$. Soit π_k l'opérateur défini sur les fonctions de m trajectoires comme la permutation circulaire des arguments qui déplace chacun d'eux de k rangs.

Soit Π l'opérateur défini par

$$\Pi\, h(\omega^m) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \left[\theta_1(\omega^m)\, h(\omega^m) \right] \qquad (1\text{-}8)$$

Π se réduit à l'identité si h est une fonction symétrique. On applique Π aux deux membres de (1-3) et on obtient

$$\rho_\Lambda^+ = A_\Lambda \, (\zeta + K \, \rho_\Lambda^+) \tag{1-9}$$

où ζ est le vecteur de E défini par $\zeta_0 = 0$, $\zeta(\omega) = z$, $\zeta(X) = 0$ $(m > 1)$.

A_Λ est l'opérateur linéaire de E dans E défini per

$$A_\Lambda \, h(X) = \alpha_\Lambda(X) \, h(X) \tag{1-10}$$

K est l'opérateur linéaire défini dans E par

$$(K\,h)\,(\omega^m) = z \sum_{k=1}^{m} \pi_k \left\{ \theta_1(\omega^m) \exp\left[- F_1(\omega^m) \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int P_{u^n u^n} \, (d\overline{\omega^n}) \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \; du^n \; K(\omega_1, \overline{\omega^n}) \; h(\omega^{m-1}, \overline{\omega^n}) \right] \right\} \qquad \text{pour } m > 1 \tag{1-11}$$

$$(K\,h)\,(\omega) = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int P_{u^n, u^n} \, (d\overline{\omega^n}) \; du^n \; K(\omega_1, \overline{\omega^n}) \; h(\overline{\omega^n}) \tag{1-12}$$

$$(K\,h)_0 = 0 \tag{1-13}$$

K n'est pas défini dans E entier, et l'étape suivante consiste à trouver pour K un domaine convenable. On négligera par la suite le fait que les fonctions $\theta_j(X)$ ne sont pas continues dans $S^m - \mathfrak{G}_m$. En effet, $F_j(X)$ est continue, donc les W_j^m sont fermés. Il est alors facile de construire, en remplaçant au besoin la constante B par $B + \eta$ $(\eta > 0)$ et en utilisant le théorème d' Urysohn, [14], une partition de l'unité au moyen de fonctions continues jouant le même rôle que les θ_j. On raisonnera donc comme si les θ_j étaient continues.

On définit maintenant des sous espaces topologiques de E en s'inspirant des remarques suivantes.

(R1) Soit $h \in E$. les quantités

$$N_m(h) = \operatorname*{Sup}_{\omega^m(m)} |h(\omega^m)| / \Delta(\omega^m) \tag{1-14}$$

(où $\underset{a(b)}{\text{Sup}}$ signifie borne supérieure quand a varie, b étant fixé), forment une famille de semi-normes et définissent sur E une topologie localement convexe.

(R2) Soit $\sigma = (\sigma_m)$ une suite de nombres réels strictement positifs. Soit $E_{(\sigma)}$ le sous espace des $h \in E$ tels que

$$\| h \|_{(\sigma)} = \operatorname{Sup}_{m} \frac{1}{\sigma_m} \frac{|h(\omega^m)|}{\Delta(\omega^m)} < +\infty \qquad (1\text{-}15)$$

$E_{(\sigma)}$ est un espace de Banach avec $\| h \|_\sigma$ comme norme de h. E muni de la topologie décrite dans la remarque (R1) est la limite inductive des $E_{(\sigma)}$. Dans la suite, on aura seulement besoin du $E_{(\sigma)}$ associé à la suite particulière : $\sigma_m = 1$ pour tout $m \geq 0$. On notera E_Δ cet espace, et $\| h \|_\Delta$ la norme dans E_Δ.

On se limite maintenant de façon provisoire aux potentiels sans coeur dur, et plus précisément aux potentiels satisfaisant (A), (B), (C) et (D). On choisit $\Delta(\omega) = \xi$ où ξ est une constante réelle strictement positive. On appelle E_ξ l'espace E_Δ associé à ce choix de Δ, et $\| h \|_\xi$ la norme dans E_ξ :

$$\| h \|_\xi = \operatorname{Sup}_{\omega^m} \frac{1}{\xi^m} |h(\omega^m)| \qquad (1\text{-}16)$$

Le vecteur ζ défini plus haut est dans E_ξ et satisfait :

$$\| \zeta \|_\xi = |z| \,/\, \xi \qquad (1\text{-}17)$$

L'opérateur A_Λ défini par (1-10) est un opérateur borné dans E_ξ, de norme 1. L'opérateur K satisfait le lemme suivant :

Lemme (1-1). K est un opérateur borné de E_ξ dans E_ξ.

Démonstration. Soit $h \in E_\xi$. On doit, pour K h(X)

1) établir l'existence et obtenir des majorations convenables.

2) établir la continuité.

On procède dans cet ordre. Il résulte de (1-6), (1-11), que :

$$|K\ h\ (\omega^m)| \leq |z|\ e^{2\beta B}\ \|\ h\ \|_\xi \xi^{m-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[\operatorname{Sup}_\omega \int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du \right.\right.$$

$$\left.\left. \times\ \left| \exp\left[- \int_0^\beta dt\ \Phi(\omega(t) - \bar{\omega}(t)) \right] - 1 \right| \right]^n \right\} \qquad (1\text{-}18)$$

Mais Φ est borné inférieurement par $-2B$. Donc :

$$\left| \exp\left[- \int_0^\beta \Phi(\omega(t) - \bar{\omega}(t)\ dt \right] - 1 \right| \leq \frac{e^{2\beta B} - 1}{2\beta B} \int_0^\beta \Phi_-(\ )\ dt + \int_0^\beta {}_+(\ )\ dt \qquad (1\text{-}19)$$

où $$\Phi_\pm\ (x) = \operatorname{Max}\ (\pm\ \Phi(x),\ 0) \qquad (1\text{-}20)$$

Soit $\bar{\omega}'$ la trajectoire déduite de $\bar{\omega}$ par la translation - u. On note $\bar{\omega} = \bar{\omega}' + u$. Alors :

$$\operatorname{Sup}_\omega \int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du\ \left| \exp\left[id \right] - 1 \right| \leq \operatorname{Sup}_\omega \int P_{OO}\ (d\bar{\omega}')\ du \left\{ \frac{e^{2\beta B} - 1}{2\beta B} \times \right.$$

$$\left. \int_0^\beta \Phi(\omega(t) - \bar{\omega}'(t) - u)\ dt + \int_0^\beta \Phi_+(\omega(t) - \bar{\omega}'(t) - u)\ dt \right\} \qquad (1\text{-}21)$$

D'après le théorème de Fubini, on peut intégrer successivement sur u, sur t, et sur $\bar{\omega}'$. Les trois intégrations sont triviales, et on trouve :

$$\operatorname{Sup}_\omega \int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du\ \left| \exp\left[\ \right] - 1 \right| \leq C(\beta) = \frac{1}{\lambda^\nu} A(\beta) \qquad (1\text{-}22)$$

$$\text{où } \lambda^\nu\ C(\beta) = A(\beta) = \frac{e^{2\beta B} - 1}{2B} \int \Phi_-(x)\ dx + \beta \int \Phi_+(x)\ dx \qquad (1\text{-}23)$$

Dans certains arguments où la valeur exacte de $A(\beta)$ est sans importance, on utilisera la majoration plus simple

$$A(\beta) \leq \beta\, e^{2\beta B} \int |\Phi(x)|\, dx \qquad (1\text{-}24)$$

On reporte (1-22) dans (1-18) et on trouve :

$$|K\, h\, (\omega^m)| \leq |z|\, e^{2\beta B}\ \xi^{-1} \exp\left[\xi\, C(\beta)\right] \xi^m \|h\|_\xi \qquad (1\text{-}25)$$

Par suite, la série (1-11) converge uniformément en X, et K h(X) existe. On doit ensuite montrer que K h(X) est continue. Les premiers facteurs de (1-11) sont continus, et la série converge uniformément. Il suffit donc de montrer la continuité de :

$$\int P_{u^n, u^n}\, (d\bar{\omega}^n)\, du^n\ K(\omega_1, \bar{\omega}^n)\, h(\omega^{m-1}, \bar{\omega}^n) \qquad (1\text{-}26)$$

On laisse provisoirement ce point de côté et on admet le résultat. La démonstration sera donnée plus loin dans le cas d'un potentiel avec coeur dur, et vaudra aussi pour le cas présent.

Le lemme résulte alors immédiatement de (1-25). De plus

$$\|K\|_\xi \leq |z|\, \xi^{-1}\ \exp\left[2\beta B + \xi\, C(\beta)\right] \qquad (1\text{-}27)$$

La valeur de ξ la plus favorable, c'est-à-dire celle qui minimise $\|K\|_\xi$ est $\xi = \left[C(\beta)\right]^{-1}$. Elle donne $\|K\|_\xi \leq |z|\, C(\beta)\ \exp(2\beta B+1)$. On rencontrera une situation analogue dans le cas (SQ), mais la minimisation en ξ ne pourra plus être faite de façon élémentaire. Pour pouvoir comparer plus facilement les deux cas, on garde donc par la suite la formule générale (1-27).

Il résulte de (1-27) que, pour

$$|z| < R = \xi \exp\left[-2\beta B - \xi C(\beta)\right] \qquad (1\text{-}28)$$

l'équation (1-9) a une solution unique dans E_ξ. ζ et K étant des fonctions entières de z, la solution est fonction analytique de z à valeurs dans E_ξ pour $|z| < R$. En outre, elle admet la majoration

$$\| \rho_\Lambda^+ \|_\xi \leq (|z|/\xi) \, (1 - |z|/R)^{-1} \qquad (1\text{-}29)$$

On vérifie maintenant que cette solution coïncide avec ρ_Λ^+ défini par (I-3-28).

Lemme (1-2). La solution de (1-9) coïncide pour $|z| < R$ avec ρ_Λ^+ (défini par (I-3-28) et par $\rho_\Lambda^+ = \rho_\Lambda - \mathbb{1}$)

Démonstration. La série donnant Z (I-3-26) est à termes positifs, donc $Z \neq 0$ dans un voisinage W de l'axe réel positif. Il résulte alors de (I-3-28), (I-3-30), que :

- $\rho_\Lambda \in E_\xi$ pour $z \in W$, $|z| < \xi \, e^{-\beta B}$, et ρ_Λ satisfait

$$\| \rho_\Lambda \|_\xi \leq \frac{1}{|Z|} \exp\left(\frac{V}{\lambda^\nu} \, |z| \, e^{\beta B} \right) \qquad (1\text{-}30)$$

- ρ_Λ est une fonction analytique de z à valeurs dans E_ξ, pour z dans la même région.

Par suite, ρ_Λ^+ coïncide avec la solution de (1-9) dans l'intersection de cette région avec $|z| < R$, donc par prolongement analytique, dans tout le disque $|z| < R$.

Il résulte de (I-3-26), (I-3-28) que

$$\int P_{uu} \, (d\omega) \, du \, \rho_\Lambda(\omega) = z \frac{d}{dz} \, \mathrm{Log} \, Z \qquad (1\text{-}31)$$

Le premier membre est analytique en z pour $|z| < R$, et Z est une fonction en entière de z. Par suite, Z n'a pas de zéros pour $|z| < R$.

En reportant (1-29) dans (I-3-27), on obtient

$$|\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)| \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1}\ \xi^m\ \psi_\beta(x^m-y^m) \qquad (1\text{-}32)$$

$\psi_\beta(x^m-y^m)$ considéré comme opérateur dans $L^2(\Lambda^m)$ est borné et de norme inférieure à 1. Donc $\bar{\rho}_\Lambda\ (x^m,y^m)$ est une fonction analytique de z pour $|z| < R$ à valeurs dans l'espace des opérateurs bornés dans $L^2(\Lambda^m)$, et satisfait :

$$\|\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)\|_2 \leq \frac{|z|}{\xi}(1 - |z|/R)^{-1}\ \xi^m. \qquad (1\text{-}33)$$

On passe maintenant au cas plus général des potentiels avec coeur dur, et plus précisément des potentiels Φ satisfaisant les conditions (A), (B'), (C) et (D) de (I-1). Il apparaitra clairement par la suite que K n'est plus un opérateur borné de E_ξ dans E_ξ. On prend donc le problème à rebours et on cherche Δ tel que K soit un opérateur borné de E_Δ dans E_Δ. On décompose comme précédemment cette exigence en deux parties :

1) obtenir des majorations convenables.
2) établir une propriété de continuité.

Soit $h \in E_\Delta$

$$|K\ h\ (\omega^m)| \leq |z|\ e^{2\beta B}\ \|\ h\ \|_\Delta\ \Delta(\omega^{m-1})\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\ \frac{1}{n!}\int P_{u^n,u^n}\ (d\bar{\omega}^n)\ du^n$$

$$\times\ |K(\omega,\bar{\omega}^n)|\ \Delta(\bar{\omega}^n)\Big] \qquad (1\text{-}34)$$

$$\leq |z|\ e^{2\beta B}\ \|\ h\ \|_\Delta\ \Delta(\omega^{m-1})\ \exp\Big[\int P_{uu}(d\bar{\omega})\ d\omega\ |K(\omega,\bar{\omega})|\ \Delta(\bar{\omega})\Big] \qquad (1\text{-}35)$$

où ω^{m-1} est obtenu comme précédemment à partir de ω^m en enlevant ω.

S'il existe ξ strictement positif tel que pour tout ω:

$$\xi \exp\left[\int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du\ |K(\omega,\bar{\omega})|\ \Delta(\bar{\omega})\right] \leq \Delta(\omega) \qquad (1\text{-}36)$$

alors

$$|K\ h(\omega^m)| \leq |z|\ e^{2\beta B}\ \xi^{-1} \| h \|_\Delta\ \Delta(\omega^m) \qquad (1\text{-}37)$$

Par suite, sous l'hypothèse que les conditions de continuité sont satisfaites, K est un opérateur borné de E_Δ dans E_Δ et sa norme satisfait :

$$\| K \|_\Delta \leq |z|\ \xi^{-1}\ e^{2\beta B} \qquad (1\text{-}38)$$

On doit donc chercher (ξ,Δ) satisfaisant (1-36), avec ξ aussi grand que possible. On commence par majorer le premier membre de (1-36). On introduit la trajectoire $\bar{\omega}'$ telle que $\bar{\omega} = \bar{\omega}' + u$. Pour toute trajectoire continue ω, on appelle $V(\omega)$ la réunion des sphères de rayon a centrées en tous les points de ω, et $v(\omega)$ le volume de $V(\omega)$. On impose à $\Delta(\omega)$ d'être invariante par translation globale de la trajectoire. Alors

$$\int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du\ \ |K(\omega,\bar{\omega})|\ \ \Delta(\bar{\omega}) = \int P_{OO}\ (d\bar{\omega}')\ \Delta(\bar{\omega}') \int du\ |K(\omega,\bar{\omega}' + u)| \qquad (1\text{-}39)$$

$$\int du\ |K(\omega,\ \bar{\omega}' + u)| = \int du\ \left|\exp\left[-\int_0^\beta dt\ \Phi(\omega(t) - \bar{\omega}'(t) - u)\right] - 1\right| \qquad (1\text{-}40)$$

Le coeur dur ne contribue à cette intégrale que si $u \in V(\omega - \bar{\omega}')$. (La différence des deux trajectoires est définie par $\omega - \bar{\omega}'(t) = \omega(t) - \bar{\omega}'(t)$). On traite la contribution de la région $u \notin V(\omega - \bar{\omega}')$ par la même méthode qu'en l'absence de coeur dur. Finalement :

$$\int du\ |K\ (\omega,\ \bar{\omega}' + u)| \leq v(\omega - \bar{\omega}') + A \qquad (1\text{-}41)$$

où $A = A(\beta) = \dfrac{e^{2\beta B} - 1}{2B} \int_{|x| \geq a} \Phi_-(x)dx + \beta \int_{|x| \geq a} \Phi_+(x)\ dx \qquad (1\text{-}42)$

On remplace alors (1-36) par la condition suffisante

$$\xi \exp\left\{ \int P_{00}\ (d\bar{\omega})\ (v(\omega - \bar{\omega}) + A)\ \Delta(\bar{\omega}) \right\} \leq \Delta(\omega) \qquad (1\text{-}43)$$

On pose $\Delta(\omega) = \xi \exp\ (\phi(\omega))$. (1-43) devient

$$\phi(\omega) \geq \xi \int P_{00}(d\bar{\omega}) \left[v(\omega - \bar{\omega}) + A \right] \exp\ (\phi(\bar{\omega})) \qquad (1\text{-}44)$$

Ceci implique en particulier $\phi(\omega) \geq 0$, et par suite $\Delta(\omega) \geq \xi$. En raison de la présence du terme $v(\omega - \bar{\omega})$, le second membre n'est pas une fonction bornée de ω. Il n'existe donc pas de solution du type $\phi(\omega)$ = constante. Ceci entraîne que dans ce cas, comme on l'a annoncé plus haut, K n'est pas un opérateur borné dans E_ξ.

(1-44) est une équation intégrale de type exponentiel, relativement classique [23]. On montre en appendice qu'il existe $\xi_0 > 0$ tel que (1-44) a une solution réelle positive minimale ϕ_ξ pour tout ξ satisfaisant $0 \leq \xi < \xi_0$, et pas de solution réelle positive finie pour $\xi > \xi_0$. ϕ_ξ peut être obtenue par itération à partir de 0, et est la valeur pour $\xi \in [0,\ \xi_0]$ d'une fonction de (ξ, ω) continue en ω et analytique en ξ pour $|\xi| < \xi_0$. On choisit désormais ξ $(0 < \xi < \xi_0)$ et on prend $\Delta(\omega) = \xi \exp \left[\phi_\xi(\omega) \right]$. $\Delta(\omega)$ est alors une fonction continue de ω, et la fonction

$$f_\beta(y - x) = \int P_{xy}\ (d\omega)\ \Delta(\omega) \qquad (1\text{-}45)$$

est une fonction réelle positive continue bornée et intégrable de $y - x$.

On note

$$\text{Sup } f_\beta(x) = \| f_\beta \|_\infty \ , \int f_\beta(x)\, dx = \| f_\beta \|_1 \qquad (1\text{-}46)$$

Enfin, $\Delta(\omega)$ satisfait les conditions ($\Delta 1$) et ($\Delta 2$) du chapitre II. Toutes ces propriétés sont établies en appendice (A1).

Pour montrer que K est un opérateur borné dans E_Δ , il reste à prouver que si $h \in E_\Delta$, la fonction (1-26) est une fonction continue de ω^m dans $S^m - \mathfrak{F}_m$. Soit $\omega^m \in S^m - \mathfrak{F}_m$ et ω'^m voisin de ω^m et tel que $\| \omega^m - \omega'^m \| \leq \eta$. Il résulte de ($\mathfrak{F}4$) que, quand ω'^m tend vers ω^m, $K(\omega'_1, \overline{\omega}^n)\ h(\omega'^{m-1}, \overline{\omega}^n)$ tend vers $K(\omega_1, \overline{\omega}^n)\ h(\omega^{m-1}, \overline{\omega}^n)$ simplement presque partout au sens de la mesure $P_{u^n, u^n}(d\overline{\omega}^n)\, du^n$. On montre maintenant que $K(\omega'_1, \overline{\omega}^n)\ h(\omega'^{m-1}, \overline{\omega}^n)$ est majorée uniformément en ω'^m pour $\| \omega'^m - \omega^m \| \leq \eta$ par une fonction intégrable de $\overline{\omega}^n$. D'après ($\Delta 2$)

$$|h\ (\omega'^{m-1}, \overline{\omega}^n)| \leq \Delta_\eta(\omega^{m-1})\ \Delta\ (\overline{\omega}^n) \qquad (1\text{-}47)$$

D'autre part

$$|K(\omega'_1, \overline{\omega}^n)| \leq \prod_{j=1}^{n} K_\eta(\omega_1, \overline{\omega}_j) \qquad (1\text{-}48)$$

où $K_\eta(\omega, \overline{\omega})$ est défini de la façon suivante :

$$K_\eta(\omega, \overline{\omega}) = e^{2\beta B} \quad \text{si} \quad \omega - \overline{\omega} \text{ rencontre la région } |x| < b \qquad (1\text{-}49)$$

$$K_\eta(\omega, \overline{\omega}) = \beta\, e^{2\beta B} \int_0^\beta \Phi_\eta(\omega(t) - \overline{\omega}(t))\, dt \qquad (1\text{-}50)$$

en cas contraire. b et Φ_η sont définies dans la section (I-1).

Il suffit alors de montrer que $K_\eta(\omega, \overline{\omega}^n)\ \Delta_\eta(\omega^{m-1})\ \Delta(\overline{\omega}^n)$ est intégrable, et pour cela que l'intégrale

$$\int P_{uu}\ (d\overline{\omega})\ du\ K_\eta(\omega, \overline{\omega})\ \Delta(\overline{\omega})$$

existe. Un calcul analogue à celui qui mène à (1-41) montre que :

$$\int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ K_\eta(\omega,\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega}) = \int P_{00}\ (d\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega})\ \ e^{2\beta B}\left[v_b(\omega-\bar{\omega}) + \beta\int \Phi_\eta(x)\ dx\right] \tag{1-51}$$

où $v_b(\omega - \bar{\omega})$ est défini de façon analogue à $v(\omega - \bar{\omega})$ en remplaçant a par b et où le dernier terme est fini grâce à la seconde partie de la condition (C).

L'existence de l'intégrale au second membre de (1-51) résulte immédiatement des propriétés de $\Delta(\bar{\omega})$ démontrées en appendice. La continuité de (1-26) est alors une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue [15].

K est donc un opérateur borné dans E_Δ. Par suite, pour tout z tel que

$$|z| < R = \xi \exp(-2\beta B) \tag{1-52}$$

l'équation (1-9) a une solution unique dans E_Δ, qui est analytique en z pour $|z| < R$. De plus, $\| \zeta \|_\Delta \leq |z|/\xi$, donc

$$\| \rho^+_\Lambda \|_\Delta \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1} \tag{1-53}$$

On montre comme précédemment que la solution de (1-9) coïncide avec ρ^+_Λ défini par (I-3-28) pour $|z| < R$. En comparant (1-53) et (I-3-27), on trouve :

$$|\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)| \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1} \int P_{x^m,y^m}\ (d\omega^m)\ \Delta(\omega^m) \tag{1-54}$$

$\bar{\rho}_\Lambda\ (x^m,y^m)$ est encore un opérateur borné dans $L^2(\Lambda^m)$ et on montre aisément que

$$\| \bar{\rho}_\Lambda\ (x^m,y^m) \|_2 \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1} \| f_\beta \|_1^m \tag{1-55}$$

2 - EQUATIONS DE KIRKWOOD-SALZBURG DANS LE CAS (SQ)

On établit d'abord les équations. On suppose que le potentiel satisfait les conditions (A), (B) ou (B'), et (G) de (I-1). La série définissant ρ_Λ (I-3-47) est convergente pour $|z| < \exp(-\beta B)$ et majorée par (I-3-54). On aura à utiliser l'espace E de la section (II-2) correspondant au choix des $\mathfrak{G}_{j^m}$ de la remarque (R1) de la même section. Les notations sont celles de (II-2). Dans la définition de ρ_Λ(I-3-47), on met en évidence la contribution de la trajectoire (ω_1, j_1).

$$\rho_\Lambda(X) = Z_\varepsilon^{-1} \exp\left[-F_1(X)\right] \alpha_\Lambda(X) \sum_{r=0}^{\infty} z^{q+r} \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \bar{\omega}^\delta \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^\delta) \times$$

$$\sum_{S \subset Y} K(\omega_1, j_1 ; S) \exp\left[-U(X', Y)\right] \qquad (2\text{-}1)$$

où $Y = \bar{\omega}^\delta$, $S = \bar{\omega}^{\delta'}$, $\delta' \leq \delta$, et X' s'obtient à partir de X en enlevant (ω_1, j_1).

Tous les termes de la dernière somme qui correspondent au même δ' ont des contributions égales. On remplace donc $\sum_{S \subset Y}$ par $\sum_{\delta' \leq \delta} \prod_j C_{\delta_j}^{\delta'_j}$ et on utilise (II-2-34).

$$\rho_\Lambda(X) = Z_\varepsilon^{-1} \exp\left[-F_1(X)\right] \alpha_\Lambda(X) \sum_{r=0}^{\infty} z^{q+r} \sum_{\delta(r)} \sum_{\delta' \leq \delta} \int d_\varepsilon \bar{\omega}^{\delta'} \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^{\delta'}) \times$$

$$K(\omega_1, j_1 ; \bar{\omega}^{\delta'}) \, d_\varepsilon \bar{\omega}^{\delta''} \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^{\delta''}) \exp\left[-U(X', Y)\right] \qquad (2\text{-}2)$$

où $\delta'' = \delta - \delta'$.

Mais $\sum_{r} \sum_{\delta(r)} \sum_{\delta' \leq \delta} = \sum_{r'} \sum_{\delta'(r')} \sum_{r''} \sum_{\delta''(r'')}$. On regroupe la somme sur (r'', δ'') pour faire apparaître $\rho_\Lambda(X'+S)$ et on remplace dans le résultat final (r', δ') par (r, δ). On revient a la notation $X = \omega^\gamma$, $X' = \omega^{\gamma'}$, et on trouve

$$\rho_\Lambda(\omega^\gamma) = \alpha_\Lambda(\omega_1)\, z^{j_1} \exp\left[-F_1(X)\right] \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon\, \bar{\omega}^\delta\; K(\omega_1, j_1, \bar{\omega}^\delta) \;\times \right.$$

$$\left. \rho_\Lambda(\omega^{\gamma'}, \bar{\omega}^\delta) \right\} \qquad \text{pour } m > 1 \qquad (2\text{-}3)$$

$$\rho_\Lambda(\omega_1, j_1) = \alpha_\Lambda(\omega_1)\, z^{j_1} \exp\left[-F_1(\omega_1, j_1)\right] \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon\, \bar{\omega}^\delta \;\times \right.$$

$$\left. K(\omega_1, j_1\,;\, \bar{\omega}^\delta)\; \rho_\Lambda(\bar{\omega}^\delta) \right\} \text{ pour } m = 1 \qquad (2\text{-}4)$$

La majoration (I-3-54) assure la convergence absolue des séries pour $|z|$ assez petit et justifie les changements d'ordre des sommes et intégrations dans le calcul précédent.

On symétrise maintenant l'équation (2-3) par la même méthode que dans le cas (SB).

La condition (G) de (I-1) entraîne :

$$\sum_{i=1}^{m} F_i(\omega^\gamma) \geq -2\, q\, \beta\, B \qquad (2\text{-}5)$$

où F_i est défini de façon analogue a F_1 (II-2-53). Soit W_i^γ l'ensemble des ω^γ continues telles que $F_i(\omega^\gamma) \geq -2\, j_i\, \beta\, B$, n_i^γ la fonction caractéristique de W_i^γ, et $\theta_i^\gamma = n_i^\gamma \,/\, \sum_{i=1}^{m} \theta_i^\gamma$. Il résulte de (2-5) que $\sum_{i=1}^{m} \theta_i^\gamma = 1$. On définit π_k et Π comme précédemment. En particulier :

$$\Pi\, h(\omega^\gamma) = \sum_{k=1}^{m} \pi_k\, (\theta_1^\gamma(\omega^\gamma)\, h(\omega^\gamma)) \qquad (2\text{-}6)$$

Appliqué à une fonction symétrique, et en particulier à une fonction quelconque de E, Π se réduit à l'identité. On applique Π aux deux membres de (2-3) et on obtient comme précédemment

$$\rho_\Lambda^+ = A_\Lambda \, (\zeta + K \, \rho_\Lambda^+) \tag{2-7}$$

où . $\rho_\Lambda^+ = \rho_\Lambda - \mathbb{1}$ (2-8)

. ζ est le vecteur de G défini par

$$\begin{cases} \zeta_0 = 0 \ , \ \zeta(\omega_1, j_1) = z^{j_1} \ \exp\left[- F_1(\omega_1, j_1)\right] \\ \zeta(\omega^\gamma) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \end{cases} \tag{2-9}$$

. A_Λ est l'opérateur linéaire dans E défini par :

$$(A_\Lambda \, h) \, (\omega^\gamma) = \alpha_\Lambda(\omega^\gamma) \, h(\omega^\gamma) \tag{2-10}$$

. K est l'opérateur linéaire défini par

$$K \, h(\omega^\gamma) = \sum_{i=1}^{m} z^{j_i} \ \pi_i \left\{ \theta_1^\gamma(\omega^\gamma) \, \exp\left[- F_1(\omega^\gamma)\right] \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \ \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \, \bar{\omega}^\delta \ \times \right.\right.$$

$$\left.\left. K(\omega_1, j_1 \ ; \ \bar{\omega}^\delta) \, h(\omega^{\gamma'}, \bar{\omega}^\delta) \right\} \right\}_\infty \qquad \text{pour } m > 1 \tag{2-11}$$

$$K \, h(\omega_1, j_1) = z^{j_i} \ \exp\left[- F_1(\omega_1, j_1)\right] \ \sum_{r=1} \ \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \, \bar{\omega}^\delta \quad K(\omega_1, j_1 \ ; \ \bar{\omega}^\delta) \, h(\bar{\omega}^\delta)$$

$$\text{pour } m = 1 \tag{2-12}$$

$$(K \, h)_0 = 0 \tag{2-13}$$

On raisonnera par la suite comme si les θ_i^γ étaient des fonctions continues.

On cherche maintenant pour K un domaine de définition convenable. Soit $h \in G$. La famille de semi-normes

$$N_m(h) = \sup_{\omega^\gamma(m)} |h(\omega^\gamma)| / \Delta(\omega^\gamma) \qquad (2\text{-}14)$$

définit sur l'espace vectoriel G une topologie localement convexe. Pour toute suite (σ) de nombres réels strictement positifs, le sous espace $G_{(\sigma)}$ des $h \in G$ tels que

$$\| h \|_{(\sigma)} = \sup_{\omega^\gamma} \frac{1}{\sigma_m} |h(\omega^\gamma)| / \Delta(\omega^\gamma) < +\infty \qquad (2\text{-}15)$$

est un espace de Banach avec $\| h \|_{(\sigma)}$ pour norme de h. G muni de la topologie précédente est la limite inductive des $G_{(\sigma)}$. $G_{(\sigma)}$ n'est pas une sous algèbre de G pour le produit $*$, mais le lemme (II-2-2) montre que $G_{(\sigma_1)} * G_{(\sigma_2)} \subset G_{(\sigma)}$ où (σ) est définie à partir de (σ_1), (σ_2) par (II-2-5). Par la suite, on considère seulement l'espace $G_{(\sigma)}$ associé à la suite (σ) telle que $\sigma_m = 1$ pour tout m. On note G_Δ cet espace, et $\| h \|_\Delta$ la norme dans G_Δ.

On se limite maintenant de façon provisoire aux potentiels sans coeur dur. On ne peut imposer la condition (F) qui, en présence de coeur dur, sera essentielle pour le succès de la méthode. On doit, en compensation imposer la condition beaucoup plus forte (E), c'est-à-dire se restreindre aux potentiels purement répulsifs. Les conditions (D) et (G) sont alors trivialement satisfaites, avec $B = 0$. On considère donc des potentiels satisfaisant (A), (B), (C) et (E).

On choisit $\Delta(\omega, j) = \xi^j$ où ξ est une constante reelle satisfaisant $0 < \xi < 1$. On appelle G_ξ l'espace correspondant et $\| h \|_\xi$ la norme de $h \in G_\xi$. Le vecteur ζ défini par (2-9) est dans G_ξ pour $|z| \leq \xi$ et satisfait

$$\| \zeta \|_\xi = |z| / \xi \qquad (2\text{-}16)$$

A_Λ défini par (2-10) est un opérateur borné de norme 1 dans G_ξ.

Lemme (2-1) . K est un opérateur borné de G_ξ dans G_ξ pour $|z|$ assez petit.

Démonstration . Soit $h \in G_\xi$

On montre d'abord que la série donnant K h(X) est uniformément convergente par rapport à X pour γ fixé, et convenablement majorée. De (2-11) et de la condition (E), on déduit

$$|K\,h(X)| \leq \sup_{j_i} |z|^{j_i} \|h\|_\xi \xi^{q-j_i} \sum_{r=0}^{\infty} \xi^r \sum_{\delta(r)} \int d_+ \bar{\omega}^\delta |K(\omega_i j_i ; \bar{\omega}^\delta)| \tag{2-17}$$

La dernière série est majorée par

$$\sum_r \ldots \leq \sum_\delta \prod_j \frac{\xi^{j\delta_j}}{\delta_j!} \frac{1}{j} \int P^j_{uu}(d\bar{\omega})\, du\, |K(\omega_i, j_i ; \bar{\omega}, j)| \tag{2-18}$$

$$\leq \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^j}{j} \int P^j_{uu}(d\bar{\omega})\, du\, |K(\omega_i, j_i ; \bar{\omega}, j)| \right\} \tag{2-19}$$

On démontre par la même méthode que dans la section (III-1), où on remplace β par $j\beta$ et Φ par $j_i \Phi$, B par O, que

$$\int P^j_{uu}(d\bar{\omega})\, du\, |K(\omega_i, j_i ; \bar{\omega}, j)| \leq \frac{1}{\lambda^\nu j^{\nu/2}} \beta\, j\, j_i \int \Phi(x)\, dx \tag{2-20}$$

On reporte (2-20) dans (2-19), et on obtient :

$$|K\,h(X)| \leq \sup_{j_i} \left(|z| \exp(D(\beta)) \right)^{j_i} \xi^{q-j_i} \|h\|_\xi \tag{2-21}$$

$$\text{où } D(\beta) = \frac{1}{\lambda^\nu} \beta \int \Phi(x)\, dx \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j / j^{\nu/2} \tag{2-22}$$

La série (2-22) et la série (2-18) convergent uniformément par rapport à X pourvu que $\xi < 1$. La borne supérieure dans (2-21) est à prendre sur tous les j qui figurent dans X, c'est-à-dire tels que $\gamma_j \geq 1$. On peut, dans (2-21) oublier cette dernière restriction.

On repousse à l'étude du cas général la démonstration de la continuité en X de K h(X). K est alors un opérateur borné de G_ξ dans G_ξ pour

$$|z| < R = \xi \exp\left[- D(\beta)\right] \qquad (2\text{-}23)$$

et sa norme est bornée par

$$\| K \|_\xi \leq |z| / R \qquad (2\text{-}24)$$

La valeur de ξ la plus favorable est celle qui minimise R, mais contrairement au cas (SB), sa détermination n'est pas élémentaire. On garde donc la forme générale (2-23) de R.

Il résulte de (2-24) que pour $|z| < R$, l'équation (2-7) a une solution unique dans G_ξ. K et ζ étant des fonctions entières de z, cette solution est une fonction analytique de z à valeurs dans G_ξ pour $|z| < R$, satisfaisant :

$$\| \rho_\Lambda^+ \|_\xi \leq (|z| / \xi) \, (1 - |z|/R)^{-1} \qquad (2\text{-}25)$$

On démontre comme précédemment que la solution de (2-7) coïncide pour $|z| < R$ avec le ρ_Λ^+ initial défini par (I-3-47). On utilise pour cela la majoration (I-3-54) pour B = 0, qui exprime que le ρ_Λ initial est dans G_ξ pour $|z| < \xi$. On démontre également que Z_ε, qui d'après (I-3-52) est fonction analytique de z pour $|z| < \xi$, donc a fortiori pour $|z| < R$, n'a pas de zéros pour $|z| < R$.

Enfin, en reportant (2-25) dans (I-3-47), on obtient :

$$|\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)| \leq \frac{|z|}{\xi}\ (1 - |z|/R)^{-1}\ \ m!\left\{\frac{1}{\lambda^\nu}\ \sum_1^\infty\ \xi^j/j^{\nu/2}\ \right\}^m \qquad (2\text{-}26)$$

De plus, $\bar{\rho}_\Lambda\ (x^m,y^m)$ est une fonction analytique de z pour $|z|< R$ à valeurs dans l'espace des opérateurs bornés dans $L^2(\Lambda^m)$, et satisfait

$$\|\ \bar{\rho}_\Lambda\ (x^m,y^m)\ \|_2 \leq (|z|/\xi)\ (1 -|z|/R)^{-1}\ \ m!\ (\xi/(1-\xi))^2 \qquad (2\text{-}27)$$

On passe maintenant au cas des potentiels avec coeur dur, et plus précisément des potentiels satisfaisant les conditions (A), (B'),(C) et (F), cette dernière impliquant (D) et (G). Comme dans le cas (SB), il apparaîtra que K n'est plus un opérateur borné de G_ξ dans G_ξ. On cherche donc Δ tel que K soit un opérateur borné de G_Δ dans G_Δ.

On cherche d'abord des majorations convenables de K h(X) pour h $\in G_\Delta$. On déduit de (2-11)

$$|K\ h(X)| \leq \operatorname*{Sup}_{j_i} (|z|e^{2\beta B})^{j_i}\ \Delta(\omega_i^{\gamma'})\|\ h\ \|_\Delta \left\{\sum_{r=0}^\infty\ \ \sum_{\delta(r)}\ \int d_+\ \bar{\omega}^\delta\ \ \times\right.$$

$$\left.|K(\omega_i,j_i\ ;\ \bar{\omega}^\delta)|\ \Delta(\bar{\omega}^\delta)\right\} \qquad (2\text{-}28)$$

où $\omega_i^{\gamma'}$ est obtenue à partir de $\omega^\gamma = X$ en enlevant la trajectoire (ω_i,j_i), et pourvu que la dernière série converge. Celle-ci se ramène comme précédemment à une exponentielle.

$$\sum_r\ \ldots = \exp\left\{\sum_{j=1}^\infty\ \frac{1}{j}\ \int P_{uu}^j\ (d\bar{\omega})\ du\ \Delta(\bar{\omega}\ ,j)|\ K(\omega_i,j_i\ ;\ \bar{\omega},j)|\right\} \qquad (2\text{-}29)$$

Si cette série converge et s'il existe de plus ξ réel strictement positif tel que, pour tout (ω,k) :

$$\xi^k \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int P_{uu}^{j} (d\bar{\omega})\, du\, \Delta(\bar{\omega},j)\, |K(\omega,k\ ;\ \bar{\omega},j)|\right\} \leq \Delta(\omega,k) \qquad (2\text{-}30)$$

alors, il résulte de (2-28), (2-29) que

$$|K\ h(X)| \leq \operatorname{Sup}_{j_i} \left(|z|\ e^{2\beta B}/\xi\right)^{j_i} \|\ h\ \|_{\Delta}\ \Delta(X) \qquad (2\text{-}31)$$

Par suite, sous réserve que les conditions de continuité soient satisfaites, K est un opérateur borné dans G_{Δ} pour tout z tel que

$$|z| < R = \xi \exp(-2\beta B) \qquad (2\text{-}32)$$

et sa norme satisfait

$$\|\ K\ \|_{\Delta} \leq |z|/R \qquad (2\text{-}33)$$

On revient donc à (2-30). On majore chaque terme de la série qui figure dans l'exposant du premier membre par la même méthode que dans la section (III-1). (2-30) est alors remplacé par la condition suffisante :

$$\xi^k \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \int P_{00}^{j} (d\bar{\omega})\, \Delta(\bar{\omega},j)\left[\frac{1}{j}\ v(\omega,\bar{\omega}) + k\, e^{2j\beta B} A_{-} + kA_{+}\right]\right\} \leq \Delta(\omega,k) \qquad (2\text{-}34)$$

où maintenant :

. $v(\omega,\bar{\omega})$ est le volume de la réunion $V(\omega,\bar{\omega})$ de la famille de sphères de rayon a centrées en tous les points $\omega(t + k'\beta) - \bar{\omega}(t + j'\beta)$ où $0 \leq t \leq \beta$ et où k' et j' sont des entiers satisfaisant $0 \leq k' \leq k-1$ et $0 \leq j' \leq j-1$.

. $$A_{\pm} = \beta \int_{|x| \geq a} \Phi_{\pm}(x)\, dx \qquad (2\text{-}35)$$

. Le premier terme du crochet dans (2-34) est la contribution du coeur dur, et les deux autres majorent celle de l'extérieur de celui-ci. Le facteur $\exp(2j\beta B)$ s'introduit par l'intermédiaire de la majoration :

$$\sum_{k'=0}^{k-1} \sum_{j'=0}^{j-1} \int_0^{\beta} \Phi_-(\omega(t + k'\beta) - \bar{\omega}(t + j'\beta))\, dt \leq 2\, j\beta B \qquad (2\text{-}36)$$

La condition (F) joue ici un rôle essentiel en assurant que cette borne ne dépend pas de k, ce qui permet à la série qui figure dans l'exposant du premier membre de (2-34) de converger simultanément pour toutes les valeurs de k.

On pose $\Delta(\omega,j) = \xi^j \exp\left[\phi(\omega,j)\right]$ (2-37)

(2-34) devient

$$\phi(\omega,k) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j \int P_{00}^j (d\bar{\omega}) \exp\left[\phi(\bar{\omega},j)\right]\left[\frac{1}{j} v(\omega,\bar{\omega}) + k\, e^{2j\beta B} A_- + k\, A_+\right] \qquad (2\text{-}38)$$

Ceci implique en particulier $\phi(\omega,j) \geq 0$, donc $\Delta(\omega,j) \geq \xi^j$.

On montre en appendice que l'(in)équation (2-38) possède toutes les propriétés qu'on a utilisées dans le cas de (1-44). Il existe $\xi_0 > 0$ tel que (2-38) n'ait pas de solution réelle positive finie pour $\xi > \xi_0$, et possède pour tout $\xi < \xi_0$ une solution réelle positive minimale $\phi_\xi(\omega,j)$ qu'on peut obtenir par itération à partir de zéro. On fixe $\xi (0 < \xi < \xi_0)$ et on choisit $\Delta(\omega,j)$ défini à partir de $\phi_\xi(\omega,j)$ par (2-37). On montre alors que $\Delta(\omega,j)$ est une fonction continue de (ω,j) et que la suite $\Delta = (\Delta(\omega,j))$ satisfait les conditions (Δ1) et (Δ2) de la section (II-2). Les fonctions

$$f_j (y - x) = \int P_{xy}^j (d\omega)\, \Delta(\omega,j) \qquad (2\text{-}39)$$

sont des fonctions continues, bornées et intégrables de y - x. Enfin, la fonction :

$$g_\xi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j f_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j \int P^j_{Ox} (d\omega)\ \Delta(\omega,j) \qquad (2\text{-}40)$$

est une fonction continue, bornée et intégrable de x pour $\xi < \xi_1$, où ξ_1 est réel, et $0 < \xi_1 \leq \xi_0$. Il est extrêmement probable, mais je n'ai pas pu prouver, qu'on peut prendre $\xi_1 = \xi_0$. Par la suite, on suppose $\xi < \xi_1$. La condition ($\Delta 3$) de (II-2) est alors satisfaite. On note

$$\sup_x\ g_\xi(x) = \| g_\xi \|_\infty \quad \text{et} \quad \int dx\ g_\xi(x) = \| g_\xi \|_1 \qquad (2\text{-}41)$$

On démontre exactement comme dans le cas (SB), en utilisant les hypothèses ($\mathfrak{F}$) et (Δ) de la section (II-2) et les majorations (2-31), que $K\ h(\omega^\gamma)$ est une fonction continue de ω^γ pour $\omega^\gamma \in \mathfrak{F}_{j^m}$, ce qui achève la démonstration du fait que K est un opérateur borné dans ${}^{j^m}G_\Delta$. On est alors ramené à la même situation que dans les cas précédents. Pour tout z tel que $|z| < R$, l'équation (2-7) a une solution unique dans G , qui est une fonction analytique de z pour $|z| < R$. De (2-16) et (2-33), on tire :

$$\| \rho^+_\Lambda \|_\Delta \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1} \qquad (2\text{-}42)$$

La solution de (2-7) coïncide avec le ρ^+_Λ initial (I-3-47) pour $|z| < R$, et Z_ε n'a pas de zéros dans le même domaine.
Enfin, en reportant (2-42) dans (I-3-40), on obtient pour $\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)$ la majoration suivante :

$$|\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)| \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1}\ m!\ \| g_\xi \|^m_\infty \qquad (2\text{-}43)$$

De plus, $\bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m)$ est une fonction analytique à valeurs dans l'espace des opérateurs bornés dans $L^2(\Lambda^m)$, et satisfait

$$\| \bar{\rho}_\Lambda(x^m,y^m) \|_2 \leq (|z|/\xi)\ (1 - |z|/R)^{-1}\ m!\ \| g_\xi \|^m_1 \qquad (2\text{-}44)$$

IV - LA LIMITE DU VOLUME INFINI

Ce chapitre contient les résultats principaux de cette étude, plus précisément les théorèmes d'existence de la limite thermodynamique, et en particulier de limites bien définies pour ρ_Λ et $\bar{\rho}_\Lambda$ quand le volume du système devient infini. Le problème se présente de la façon suivante : on a défini les MDR dans la section (I-3) comme le quotient de deux séries en z. Le numérateur, pour des potentiels satisfaisant les conditions (A), (B) ou (B'), et (D) de (I-1) converge absolument et uniformément par rapport aux variables libres, pour toute valeur de z dans le cas (SB), et pour $|z| < \exp(-\beta B)$ dans le cas (SQ). Le dénominateur est la fonction de partition. C'est une fonction analytique de z dans le même domaine. Lorsque le volume devient infini, les deux termes deviennent infinis comme des exponentielles du volume. La définition précédente est donc impropre à l'étude du passage à la limite.

Dans le chapitre III, on a montré que les MDR peuvent être définies, dans un domaine $|z| < R$, où R est défini suivant les cas par (III-1-28), (III-1-52), (III-2-23) et (III-2-32) comme solution d'une équation linéaire (III-1-9) ou (III-2-7) dans un espace de Banach convenable, K étant un opérateur borné dans cet espace. L'étape principale de la démonstration était de majorer $\| K \|$. Le point essentiel, qui va permettre d'effectuer le passage à la limite dans cette nouvelle définition de ρ_Λ, est que les majorations obtenues, contrairement à celles de la section (I-3), ne dépendent pas du volume. Il en résulte immédiatement que l'équation obtenue en prenant le volume infini dans les précédentes :

$$\rho^+ = \zeta + K \rho^+ \qquad (1)$$

a une solution unique dans le même domaine $|z| < R$, fonction analytique dans ce domaine à valeurs dans l'espace de Banach approprié. On appelle désormais ρ^+ (ou $\rho = 1 + \rho^+$) cette solution.

On montre maintenant que lorsque Λ devient infini, ρ_Λ tend vers ρ en un certain sens. On suit de près le traitement du problème correspondant en mécanique classique [8]. On a considéré précédemment quatre cas : (SB) sans coeur dur, (SB) avec coeur dur, (SQ) sans coeur dur, (SQ) avec coeur dur, qu'on note respectivement (SB1), (SB2), (SQ1) et (SQ2). On rappelle que les conditions imposées au potentiel dans les quatre cas sont respectivement (A) (B) (C) (D), (A) (B') (C) (D), (A) (B) (C) (E) et (A) (B') (C) (F). Dans les quatre cas, on emploie la même méthode et on obtient les mêmes résultats. On donne donc des énoncés communs de ceux-ci, avec s'il y a lieu des démonstrations différentes. On utilise dans celles-ci le fait que (SB1) et (SQ1) sont des cas particuliers de (SB2) et (SQ2) respectivement, obtenus en remplaçant $\Delta(\omega)$ par ξ, $\Delta(\omega,j)$ par ξ^j, et a par 0. On prendra garde toutefois que ξ ne joue pas exactement le même rôle dans les cas de potentiel avec et sans coeur dur : ceci apparaît en particulier dans les définitions de R correspondant aux différents cas.

On fait tendre le volume vers l'infini de façon telle que la distance d'une région bornée fixe intérieure à Λ à la frontière de Λ augmente indéfiniment. On ne restreint pas la généralité en prenant alors pour Λ une sphère de centre fixe. Dans A_Λ, ρ_Λ, α_Λ on remplace l'indice Λ par le rayon de cette sphère. Dans tout ce chapitre, $\| \ \|$ sans autre indication désigne la norme dans l'espace de Banach adapté au cas considéré. On néglige la complication triviale venant de la dépendance de cet espace en Λ par l'intermédiaire des

définis dans les remarques (R1) des sections (II-1) et (II-2).

Soit $L > 0$, $\ell' > \ell > 0$. La première étape est de majorer

$$\| A_L K A_{L+\ell'} - A_L K A_{L+\ell} \| \qquad (2)$$

Lemme (1). $\| A_L K A_{L+\ell'} - A_L K A_{L+\ell} \| \leq \eta(\ell, L)$ (3)

où $\eta(\ell, L)$ est une fonction non décroissante de L pour ℓ fixé, et telle que $\eta(\ell, L + p\ell)$ tende vers zéro quand ℓ tend vers l'infini pour L et p positifs fixés.

Démonstration. On sépare les cas (SB) et (SQ).

1) Cas (SB). Il résulte des définitions de K(III-1-11) et A_L (III-1-10)que pour tout $h \in E_\Delta$:

$$|(A_L\ K\ A_{L+\ell'} - A_L\ K\ A_{L+\ell})\ h(\omega^m)| \leq |z| e^{2\beta B} \| h \| \operatorname{Sup}_i \Delta(\omega_i^{m-1}) \quad \times$$

$$\alpha_L(\omega_i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int P_{u^n,u^n}(d\bar{\omega}^n)\ du^n\ |K(\omega_i,\bar{\omega}^n)|\ \Delta(\bar{\omega}^n) \quad \times$$

$$\left[\alpha_{L+\ell'}(\bar{\omega}^n) - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega}^n)\right] \tag{4}$$

où ω_i^{m-1} est obtenue à partir de ω^m en enlevant ω_i. Mais :

$$\alpha_{L+\ell'}(\bar{\omega}^n) - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega}^n) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_{L+\ell'}(\bar{\omega}_j^{n-1}) \left[\alpha_{L+\ell'}(\bar{\omega}_j) - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega}_j)\right] \tag{5}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left[1 - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega}_j)\right] \tag{6}$$

On reporte (6) dans (4). on regroupe la série sous forme d'exponentielle, et on utilise la relation (III-1-36).

$$\ldots \leq |z|\ e^{2\beta B}\ \| h \| \operatorname{Sup}_i \Delta(\omega_i^{m-1})\ \alpha_L(\omega_i)\ \exp\left\{\int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ |K(\omega_i,\bar{\omega})|\ \Delta(\bar{\omega})\right\} \quad \times$$

$$\int P_{uu}(d\bar{\omega})\ du\ \Delta(\bar{\omega})\ |K(\omega_i,\bar{\omega})| \left[1 - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega})\right] \tag{7}$$

$$\leq |z|\ e^{2\beta B}\ \| h \| \Delta(\omega^m)\ C_{\ell,L}(\beta) \tag{8}$$

où $C_{\ell,L}(\beta) = \varepsilon^{-1} \operatorname{Sup}_\omega\ \alpha_L(\omega) \int P_{uu}\ (d\bar{\omega})\ du\ |\ K(\omega,\bar{\omega})|\ \Delta(\bar{\omega}) \left[1 - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega})\right]$

(9)

On suppose $\ell > 2a$, et on divise le domaine d'intégration des $\bar{\omega}$ en deux régions S_1 et S_2 :

S_1 est l'ensemble des trajectoires $\bar{\omega}$ qui restent à l'extérieur de $\Lambda_{L+\ell/2}$. Le coeur dur ne joue aucun rôle pour elles. On majore $K(\omega,\bar{\omega})$ comme dans (III-1) par

$$|K(\omega,\bar{\omega})| \leq e^{2\beta B} \int_0^\beta \Phi(\omega(t) - \bar{\omega}(t))\, dt \qquad (10)$$

On pose $\bar{\omega} = \bar{\omega}' + u$, et on remplace la condition $\bar{\omega} \in S_1$ par la condition plus faible : $|\omega(t) - \bar{\omega}'(t) - u| > \ell/2$ pour tout ω, $\bar{\omega}'$, u et t. On obtient alors une borne supérieure de la contribution de S_1 où toutes les intégrations sont triviales, et qui se réduit à :

$$\xi^{-1}\ \beta\ e^{2\beta B} \int_{|x|>\ell/2} |\Phi(x)|\, dx \int P_{00}(d\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega}) \qquad (11)$$

S_2 est l'ensemble des trajectoires qui rentrent dans $\Lambda_{L+\ell/2}$. Il en résulte que $S_2 \subset K'(\ell/2, \beta)$ défini par (I-2-22). La même méthode que dans la section (III-1) permet de majorer la contribution de S_2 par

$$\xi^{-1}\ \sup_\omega \alpha_L(\omega) \int_{K'(\ell/2,\ \beta)} P_{00}(d\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega}) \left[v(\omega - \bar{\omega}) + A \right] \qquad (12)$$

$C_{\ell,L}(\beta)$ est majorée par la somme de (11) et (12). On sépare maintenant les cas (SB1) et (SB2).

Cas (SB1). $v(\omega - \bar{\omega})$ est nul, et on remplace $\Delta(\omega)$ par ξ :

$$C_{\ell,L}(\beta) \leq \frac{1}{\lambda^\nu} \left\{ \beta\ e^{2\beta B} \int_{|x|>\ell/2} |\Phi(x)|dx + A\ \ c\ \ \sigma(\ell/8,\beta) \right\} \qquad (13)$$

où on a utilisé le lemme (I-2-6). Cette borne dépend de ℓ seul et non de L. Elle tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini. Le lemme (1) est donc démontré. De plus, $\eta(\ell,L)$ est en fait indépendant de L dans ce cas.

Cas (SB2). La borne (11) et le terme en A dans (12) sont indépendants de L et tendent vers zéro quand ℓ tend vers l'infini. Le terme en $v(\omega - \bar{\omega})$ dépend de L et est une fonction non décroissante de L pour ℓ fixé. On montre en appendice (A-1) qu'il tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini pour $L = L_0 + p\ell$, L_0 et p fixés. Le lemme (1) en résulte immédiatement.

---

2) Cas (SQ). Soit $h \in G_\Delta$. Il résulte des définitions de A_Λ (III-2-10) et de K (III-2-11) que :

$$|(A_L\ K\ A_{L+\ell'} - A_L\ K\ A_{L+\ell})\ h(\omega^\gamma)| \leq \sup_{j_i} (|z|\ e^{2\beta B})^{j_i} \| h \| \Delta(\omega_i^{\gamma'})\ \alpha_L(\omega_i) \quad \times$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\delta(r)} \int_{d_+} \bar{\omega}^\delta\ |K(\omega_i, j_i\ ;\ \bar{\omega}^\delta)|\ \Delta(\bar{\omega}^\delta) \left[\alpha_{L+\ell'}(\bar{\omega}^\delta) - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega}^\delta)\right] \qquad (14)$$

On utilise (6). On somme la dernière série en une exponentielle, et on obtient :

$$\ldots \leq \sup_{j_i} (|z|\ e^{2\beta B})^{j_i} \| h \| \Delta(\omega_i^{\gamma'})\ \alpha_L(\omega_i)\ \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int P_{uu}^j(d\bar{\omega})\ du \quad \times \right.$$

$$\left. \Delta(\bar{\omega}, j)\ |K(\omega_i, j_i\ ;\ \bar{\omega}, j)|\right\} \times \left\{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int P_{uu}^j\ (d\bar{\omega})\ du\ \Delta(\bar{\omega}, j) |\ K(\omega_i, j_i\ ; \bar{\omega}, j)| \quad \times \right.$$

$$\left. \left[1 - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega})\right]\right\} \qquad (15)$$

$$\leq \sup_{j_i} (|z|\ e^{2\beta B}/\ \xi)^{j_i} \quad \| h \| \Delta(\omega^\gamma) \quad \times \left\{\text{dernière accolade}\right\} \qquad (16)$$

où on a utilisé (III-2-30). On majore maintenant :

$$\sup_{(\omega,k)} (|z|/R)^k \left\{\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{j} \int P_{uu}^j\ (d\bar{\omega})\ du |\ K(\omega, k\ ;\ \bar{\omega}, j)|\ \Delta(\bar{\omega}, j)\ \alpha_L(\omega) \times \right.$$

$$\left. \left[1 - \alpha_{L+\ell}(\bar{\omega})\right]\right\} \qquad (17)$$

On divise comme précédemment le domaine d'intégration en deux régions :

S_1 est l'ensemble des $(\bar{\omega},j)$ qui restent hors de $\Lambda_{L+\ell/2}$. On majore sa contribution par la même méthode que dans le cas (SB). La majoration du noyau intégral analogue à (10) introduit un facteur k. On utilise la relation

$$\sup_{k\geq 1} k(|z|/R)^k \leq e^{-1}(1-|z|/R)^{-1} \qquad (18)$$

La contribution de S_1 est alors majorée par :

$$e^{-1}(1-|z|/R)^{-1}\beta\int_{|x|>\ell/2}|\Phi(x)|dx\left\{\sum_1^\infty e^{2j\beta B}\int P_{00}^j(d\bar{\omega})\Delta(\bar{\omega},j)\right\} \qquad (19)$$

Cette borne ne dépend pas de L et tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini.

S_2 est l'ensemble des $(\bar{\omega},j)$ qui rentrent dans $\Lambda_{L+\ell/2}$; un tel $(\bar{\omega},j)$ est donc dans $K'(\ell/2, j\beta)$ (I-2-22). On majore sa contribution par la même méthode que dans la section (III-2). On obtient la majoration :

$$e^{-1}(1-|z|/R)^{-1}\ A\sum_{j=1}^\infty e^{2j\beta B}\int_{K'(\ell/2,j\beta)} P_{00}^j(d\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega},j)$$

$$+\ \sup_\omega\ \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j}\int_{K'(\ell-a,j\beta)} P_{00}^j(d\bar{\omega})\ \alpha_L(\omega)\ v(\omega,\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega},j) \qquad (20)$$

Le second terme est la contribution du coeur dur ; il n'intervient que si $\bar{\omega}$ s'approche à moins de a de Λ_L où est enfermé ω, ce qui explique la présence de $K'(\ell-a, \beta)$ dans ce terme. A est défini par $A = A_+ + A_- = \beta\int|\Phi|\ dx$ (cf.III-2-35).

On sépare maintenant les cas (SQ1) et (SQ2). On rappelle que dans le cas (SQ1), la condition (E) impose B = 0.

Cas (SQ1) : de (16), des majorations (19) et (20) de (17), et du remplacement de $\Delta(\omega,j)$ par ξ^j, on déduit :

$$\|A_L K A_{L+\ell'} - A_L K A_{L+\ell}\| \leq e^{-1} (1 - |z|/R)^{-1} \frac{1}{\lambda^\nu} \left\{ \beta \int_{|x|>\ell/2} |\Phi(x)| \, dx \times \right.$$

$$\left. (\sum_1^\infty \xi^j / j^{\nu/2}) + \beta \int |\Phi(x)| \, dx \; c. \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^j}{j^{\nu/2}} \; \sigma(\ell/8, j\beta) \right\} \qquad (21)$$

Le second membre est indépendant de L et tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini. En effet, la dernière série converge uniformément par rapport à ℓ, car $\sigma(r,\beta) \leq 1$ pour tout r, et chaque terme tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini. Le lemme est donc démontré. De plus, comme dans (SB1), $\eta(\ell,L)$ est en fait indépendant de L.

Cas (SQ2). Le premier terme de (20) ne dépend pas de L, et le second est une fonction croissante de L pour ℓ fixé. On montre en appendice (A-2) que la série du premier terme tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini, et que le second terme tend vers zéro dans les conditions du lemme (1), ce qui achève la démonstration de celui-ci.

Le lemme (1) permet d'effectuer le passage à la limite sur ρ_Λ.

Lemme (2). $A_L \rho_{L+\ell}$ tend vers $A_L \rho$ quand ℓ tend vers l'infini pour L fixé, au sens de la topologie de l'espace de Banach adéquat (respectivement E_ξ, E_Δ, G_ξ, G_Δ).

Démonstration. La démonstration est la même qu'en mécanique classique [13] et n'utilise que le lemme (1) et les définitions. Dans cette démonstration, on pose $k = \| K \|$ et $A_{L+j\ell} = A_j$. En particulier $A_L = A_0$. On considère d'abord :

$$\begin{aligned} & A_0 K A_1 K \ldots A_{j-1} K - A_0 (A_j K)^j A_j \\ &= A_0 K A_1 \ldots A_{j-2} K (A_{j-1} K - A_{j-1} K A_j) \\ &+ A_0 K \ldots A_{j-3} K (A_{j-2} K A_{j-1} - A_{j-2} K A_j) K A_j + \ldots \\ &+ (A_0 K A_1 - A_0 K A_j) (K A_j)^{j-1} \end{aligned} \qquad (22)$$

On applique le lemme (1) à chaque terme de (22), et on obtient

$$\|A_0 K A_1 \cdots A_{j-1} K - A_0 (A_j K)^j A_j\| \leq k^{j-1} \sum_{p=1}^{j} n(\ell, L + (p-1)\ell) \qquad (23)$$

On montre de la même façon, en remplaçant A_j par A_∞ qui est l'identité, que :

$$\|A_0 K A_1 \cdots A_{j-1} K - A_0 K^j\| \leq k^{j-1} \sum_{p=1}^{j-1} n(\ell, L + (p-1)\ell) \qquad (24)$$

Combinant (23) et (24), on obtient

$$\|A_0 (A_j K)^j A_j - A_0 K^j\| \leq 2 k^{j-1} \sum_{p=1}^{j} n(\ell, L + (p-1)\ell) \qquad (25)$$

On remplace ℓ par ℓ/j, on utilise la non décroissance de n par rapport à son second argument, et on obtient, en revenant aux notations initiales :

$$\|A_L (A_{L+\ell} K)^j A_{L+\ell} - A_L K^j\| \leq 2 j k^{j-1} n(\ell/j, L + \ell) \qquad (26)$$

D'autre part

$$\|(1 - K)^{-1} - \sum_{j=0}^{n} K^j\| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} \qquad (27)$$

$$\|(1 - A_{L+\ell} K)^{-1} A_{L+\ell} - \sum_{j=0}^{n} (A_{L+\ell} K)^j A_{L+\ell}\| \leq \frac{k^{n+1}}{1-k} \qquad (28)$$

comparant (26), (27) et (28), on obtient

$$\|A_L (1 - A_{L+\ell} K)^{-1} A_{L+\ell} - A_L (1 - K)^{-1}\| \leq 2 \frac{k^{n+1}}{1-k} + 2 \sum_{j=1}^{n} j.k^{j-1} \times n(\ell/j, L + \ell) \qquad (29)$$

De (29) et des équations (III-1-9), (III-2-7) et (1) qui définissent ρ_Λ et ρ, on tire :

$$\|A_L \rho_{L+\ell} - A_L \rho\| \leq 2 (|z|/\xi) \left\{ \frac{k^{n+1}}{1-k} + \sum_{j=1}^{n} j k^{j-1} n(\ell/j, L + \ell) \right\} \qquad (30)$$

Pour L fixé, le second membre de (30) peut être rendu arbitrairement petit en choisissant d'abord n assez grand puis ℓ assez grand. Le lemme (2) est donc démontré.

Le second membre de (30) dépend de z par le premier facteur, et par l'intermédiaire de $k \leq |z|/R$. Par suite, la limite dans le lemme (2) est uniforme en z pour $|z| \leq R' < R$. D'autre part, dans les deux cas (SB1) et (SQ1) de potentiels sans coeur dur, $\eta(\ell,L)$ ne dépend en fait que de ℓ. Par suite, le second membre de (30) ne dépend pas de L donc la limite dans le lemme (2) est uniforme en L. On assistait au même phénomène en mécanique classique [8]. Dans ces mêmes cas, les fonctions Δ sont des constantes, donc la convergence est en outre uniforme par rapport aux ω.

Les dernières propriétés cessent d'être vraies en présence d'un coeur dur. Toutefois, les fonctions $\alpha_L \Delta$ sont bornées pour L fixé (voir l'appendice. Par suite, pour L fixé, la convergence en norme entraîne la convergence uniforme par rapport aux ω.

On déduit maintenant de la convergence des ρ_Λ la convergence des $\bar{\rho}_\Lambda = J\rho_\Lambda$ vers $\bar{\rho} = J\rho$, où J est défini respectivement par (II-1-15) et (II-2-20) dans les cas (SB) et (SQ).

Théorème 1. $\bar{\rho}_L (x^m, y^m)$ tend vers $\bar{\rho} (x^m, y^m)$ uniformément sur tout compact quand L tend vers l'infini, et uniformément en z pour $|z| \leq R' < R$.

Démonstration. On utilise seulement le fait que la norme de ρ_Λ et de ρ est bornée indépendamment de Λ, et le lemme (2) sous la forme suivante :

$$\| A_L \rho_{L+\ell} - A_L \rho \| \leq \varepsilon(\ell,L) \qquad (31)$$

où $\varepsilon(\ell,L)$ tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini pour L fixé. En outre, $\varepsilon(\ell,L)$ ne dépend que de ℓ dans les cas (SB1) et (SQ1). On traite successivement (SB) et (SQ) en se plaçant dans le cas général.

1) Cas (SB). Soit $D \subset R^\nu$ un compact et Λ_{L-r} une sphère de rayon L-r contenant D. Soit $x^m \in D^m$, $y^m \in D^m$. On déduit de (II-1-15) :

$$|\bar{\rho}_{L+\ell}(x^m,y^m) - \bar{\rho}(x^m,y^m)| \leq \int P_{x^m,y^m}(d\omega^m)\, |\rho_{L+\ell}(\omega^m) - \rho(\omega^m)| \qquad (32)$$

On divise l'espace S^m des trajectoires ω^m en deux régions :

a) L'ensemble S_L^m des trajectoires contenues dans Λ_L^m. Sa contribution est majorée par :

$$\varepsilon(\ell,L) \int P_{x^m,y^m}(d\omega^m)\, \Delta(\omega^m) \leq \varepsilon(\ell,L)\, \|f_\beta\|_\infty^m \qquad (33)$$

où f_β est défini par (III-1-45).

b) L'ensemble S'^m_L des trajectoires qui sortent de Λ_L^m. Ceci signifie qu'une au moins des m trajectoires sort de Λ_L, donc appartient à $K'(r,\beta)$ (I-2-22). La contribution de S'^m_L est donc majorée par :

$$2\, \|\rho\|_m \int P_{x^{m-1},y^{m-1}}(d\omega^{m-1})\, \Delta(\omega^{m-1}) \int_{K'(r,\beta)} P_{xy}(d\omega)\, \Delta(\omega) \qquad (34)$$

$$\leq 2\, \|\rho\|_m \|f_\beta\|_\infty^{m-1} \int_{K'(r,\beta)} P_{xy}(d\omega)\, \Delta(\omega) \qquad (35)$$

Dans le cas (SB1), $\Delta(\omega)$ se réduit à ξ, et par suite

$$|\bar{\rho}_{L+\ell}(x^m,y^m) - \bar{\rho}(x^m,y^m)| \leq \varepsilon(\ell)\, (\xi/\lambda^\nu)^m + 2\, \|\rho\|_m\, (\xi/\lambda^\nu)^{m-1} \times$$

$$c\, \sigma(r/4,\beta) \qquad (36)$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini, et le second quand r tend vers l'infini. Le théorème est donc démontré.

Dans le cas (SB2), on montre en appendice (A-1) que l'intégrale dans (35) tend vers zéro quand r tend vers l'infini uniformément par rapport à (x,y). On peut donc rendre (35) et (33) arbitrairement petits en choisissant successivement r, donc L, puis ℓ. Le théorème est démontré dans ce cas.

2) Cas (SQ). On déduit de (II-2-20)

$$|\bar{\rho}_{L+\ell}(x^m,y^m) - \bar{\rho}(x^m,y^m)| \leq m!\ \sup_{x^m,y^m \in D^m} \sum_{j^m} \int P^{j^m}_{x^m,y^m}(d\omega^m) \quad \times$$

$$|\bar{\rho}_{L+\ell}(\omega^m,j^m) - \rho(\omega^m,j^m)| \tag{37}$$

On divise le domaine d'intégration comme précédemment. La contribution de l'ensemble S_L des trajectoires contenues dans Λ_L^m est bornée par :

$$m!\ \ \varepsilon(\ell,L)\, \| g_\xi \|_\infty^m \tag{38}$$

La contribution de l'ensemble S'_L des trajectoires qui sortent de Λ_L^m est bornée par :

$$m!\ 2\, \|\rho\|^m\, \| g_\xi \|_\infty^{m-1} \quad \sup_{x,y \in D} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K'(r,j\beta)} P^{j}_{xy}(d\omega)\, \Delta(\omega,j) \right\} \tag{39}$$

Dans le cas (SQ1) , $\Delta(\omega,j)$ se réduit à ξ^j et par suite

$$|\bar{\rho}_{L+\ell}(x^m,y^m) - \bar{\rho}(x^m,y^m)| \leq m!\ \varepsilon(\ell)\left\{ \frac{1}{\lambda^\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^j}{j^{\nu/2}} \right\}^m + 2\|\rho\| \quad \times$$

$$m.\ m!\ \frac{1}{\lambda^{\nu m}} \left(\sum_1^\infty \frac{\xi^j}{j^{\nu/2}} \right)^{m-1} c\left[\sum_1^\infty \frac{\xi^j}{j^{\nu/2}}\ \sigma(r/4,\, j\beta) \right] \tag{40}$$

Dans le second membre de (40), le premier terme tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini,et le second quand r tend vers l'infini. Le théorème est donc démontré.

Dans le cas (SQ2) on montre en appendice (A-2) que la dernière série de (39) tend vers zéro quand r tend vers l'infini, uniformément en x et y. Le théorème en résulte immédiatement.

On note que les seconds membres de (36) et (40) ne dépendent que de r et ℓ, mais non de L - r. On pose L - r = L', ℓ + r = ℓ' : la remarque précédente signifie que $\bar{\rho}_{L'+\ell'}(x^m,y^m)$ tend vers $\bar{\rho}(x^m,y^m)$ quand ℓ' tend vers l'infini uniformément par rapport à $x^m,y^m \in \Lambda^m_{L'}$, et uniformément par rapport à L', dans les cas (SB1) et (SQ1), c'est-à-dire en l'absence de coeur dur. Cette remarque cesse d'être vraie en présence d'un coeur dur.

Les $\bar{\rho}_\Lambda$ et $\bar{\rho}$ sont en fait des suites d'opérateurs bornés dans des espaces du type L^2. Il est donc intéressant d'étudier le passage à la limite dans une topologie associée à ce point de vue.

Théorème (2). $\bar{\rho}_L(x^m,y^m)$ tend vers $\bar{\rho}(x^m,y^m)$ quand L tend vers l'infini au sens de la topologie forte des opérateurs dans $L^2(R^{\nu m})$. La convergence est uniforme en z pour $|z| \leq R' < R$.

Démonstration. Soit d'abord $\phi \in L^2(R^{\nu m})$, et à support compact. Soit Λ_{L-r} une sphère de rayon L - r telle que Λ^m_{L-r} contienne le support de ϕ. Pour ϕ fixé, L - r sera fixe. On pose

$$\Delta\,\bar{\rho}\,(x^m,y^m) = \bar{\rho}_{L+\ell}\,(x^m,y^m) - \bar{\rho}(x^m,y^m) \tag{41}$$

On utilise le théorème (1) sous la forme suivante : pour $x^m,y^m \in \Lambda^m_L$:

$$|\Delta\,\bar{\rho}\,(x^m,y^m)| \leq \varepsilon_1(\ell,L) \tag{42}$$

où $\varepsilon_1(\ell,L)$ tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini, pour L fixé. De plus, dans les cas (SB1) et (SQ1), ε_1 dépend en fait de ℓ seul et non de L.

On considère

$$\| \Delta\rho\ \phi \|_2^2 = \int dx^m\, dy^m\, dy'^m\, |\Delta\,\rho(x^m,y^m)\,\Delta\,\rho(x^m,y'^m)\,\phi(y^m)\,\phi(y'^m)| \tag{43}$$

Soit V le volume de Λ_{L-r} et W le volume de Λ_L. On divise le domaine d'intégration de x^m en Λ_L^m et son complémentaire Λ'^m_L.

La contribution de Λ_L^m est bornée par

$$\varepsilon_1(\ell,L)^2 \; W^m \; V^m \; \| \phi \|_2^2 \tag{44}$$

La contribution de Λ'^m_L est bornée de façon différente suivant les cas :

1) Cas (SB). on obtient la majoration :

$$\left[2 \; \| \rho \|\right]^2 \; V^m \; \| \phi \|_2^2 \quad \sup_{y^m, y'^m \in \Lambda_{L-r}^m} \int_{x^m \notin \Lambda_L^m} dx^m \; P_{x^m, y^m}(d\omega^m) \; \Delta(\omega^m)$$

$$\times \; P_{x^m, y'^m}(d\omega'^m) \; \Delta(\omega'^m) \tag{45}$$

$$\leq \left[2 \; \| \rho \| \| \phi \|_2\right]^2 \; V^m \; \| f_\beta \|_\infty^m \; m \; \| f_\beta \|_1^{m-1} \quad \sup_{y \in \Lambda_{L-r}} \int_{x \notin \Lambda_L} dx \; P_{xy}(d\omega) \; \Delta(\omega) \tag{46}$$

$$\leq \left[2 \; \| \rho \| \| \phi \|_2\right]^2 \; V^m \; \| f_\beta \|_\infty^m \; m \; \| f_\beta \|_1^{m-1} \int_{|x| > r} f_\beta(x) \; dx \tag{47}$$

f_β est intégrable, donc (47) tend vers zéro quand r tend vers l'infini, lorsqu'on a fixé ϕ, donc L - r, donc V.

Dans le cas (SB1), (47) se réduit à

$$\left[2 \; \| \rho \| \| \phi \|_2\right]^2 \; m \left(\frac{V}{\lambda^\nu} \; \xi^2\right)^m \; \sigma(r,\beta) \tag{48}$$

Il n'en résulte aucune simplification appréciable.

2) Cas (SQ). On obtient par la même méthode la majoration

$$\left[2 \; \| \rho \| \; \| \phi \|_2 \; m!\right]^2 \; V^m \; \| g_\xi \|_\infty^m \; m \| g_\xi \|_1^{m-1} \int_{|x| > r} g_\xi(x) \; dx \tag{49}$$

qui pour ϕ fixé, tend vers zéro quand r tend vers l'infini, grâce à l'intégrabilité de g_ξ. Dans le cas (SQ1), (49) se réduit à

$$\left[2 \| \rho \| \| \phi \|_2 \, m!\right]^2 \quad v^m \left(\frac{1}{\lambda^\nu} \sum_1^\infty \frac{\xi^j}{j^{\nu/2}} \right)^m \quad m \left(\frac{\xi}{1-\xi} \right)^{m-1} \quad \sum_{j=1}^\infty \xi^j \, \sigma(r, j\beta) \tag{50}$$

Il n'en résulte aucune simplification.

Il résulte de (44), (47), (49) qu'on peut rendre (43) arbitrairement petit en choisissant successivement r, donc L, et enfin ℓ. Donc pour toute $\phi \in L^2(R^{\nu m})$, ϕ à support compact, $\bar{\rho}_L \phi$ tend vers $\bar{\rho} \phi$ quand L tend vers l'infini Mais les ϕ à support compact sont denses dans $L^2(R^{\nu m})$. On en déduit que $\bar{\rho}_L$ tend vers $\bar{\rho}$ fortement. Soit en effet $\phi \in L^2(R^{\nu m})$, limite d'une suite de fonctions $\phi_j \in L^2(R^{\nu m})$, ϕ_j à support compact. Alors

$$\| \bar{\rho}_L \phi - \bar{\rho} \phi \|_2 \leq \| \bar{\rho} \|_2 \, \| \phi - \phi_j \|_2 + \| \bar{\rho}_L \|_2 \, \| \phi - \phi_j \|_2 + \| \bar{\rho}_L \phi_j - \bar{\rho} \phi_j \|_2 \tag{51}$$

$\| \bar{\rho}_L \|_2$ est borné uniformément en L. On peut donc rendre arbitrairement petits les deux premiers termes du second membre de (51) par le choix de j, et le dernier par le choix de L. Le théorème (2) est donc démontré.

Il résulte immédiatement des définitions de ζ, de K, de J, et de ρ par l'équation (1) que les $\bar{\rho}(x^m, y^m)$, qui sont les limites des $\bar{\rho}_\Lambda (x^m, y^m)$ au sens des théorèmes (1) et (2) de cette section, possèdent les propriétés élémentaires suivantes :

1) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est définie pour $|z| < R$, et fonction analytique de z dans cette région. C'est une fonction réelle de z : $\bar{\rho}_m(z^*) = (\bar{\rho}_m(z))^*$ où * désigne la conjugaison complexe.

2) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est une fonction continue de (x^m, y^m) pour $x^m \notin F_m$, $y^m \notin F_m$.

3) $\bar{\rho}\ (x^m, y^m)$ admet les mêmes majorations que $\bar{\rho}_\Lambda\ (x^m, y^m)$, c'est-à-dire suivant les cas (III-1-32,33), (III-1-54,55) , (III-2-26,27) et (III-2-43,44)

4) $\bar{\rho}\ (x^m, y^m)$ est invariante par une même translation de tous ses arguments.

Les trois premières propriétés sont communes à $\bar{\rho}$ et à $\bar{\rho}_\Lambda$. La quatrième est propre à $\bar{\rho}$. En particulier $\bar{\rho}\ (x,y)$ est une fonction de x- y seul, et $\bar{\rho}(x\ ,\ x)$ est indépendant de x. On pose $\bar{\rho}(x\ ,\ x) = \bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_1\ (z)$. C'est une fonction (scalaire) analytique de z pour $|z| < R$; elle s'interprète de façon évidente comme le prolongement analytique de la densité. En particulier, la série de Mayer, qui donne $\bar{\rho}_1$ en série de z, converge pour $|z| < R$.

On étudie maintenant le passage à la limite du volume infini dans l'expression V^{-1} Log Z qui doit définir la pression.

Théorème (3). La fonction $\beta^{-1}\ V^{-1}$ Log Z (qui est analytique en z pour $|z| < R$) converge, uniformément pour $|z| \leq R' < R$, vers une fonction p(z) qui est analytique dans $|z| < R$, lorsque le volume devient infini.

Démonstration. On a vu au chapitre II que

$$\text{Log } Z = < \alpha_\Lambda\ z,\ g > \tag{52}$$

et

$$\rho_\Lambda(\omega) = \alpha_\Lambda(\omega)\ z < \alpha_\Lambda z,\ D_\omega\ g > \tag{53}$$

On en déduit que

$$z \frac{d}{dz}\ \text{Log } Z = \int \bar{\rho}_\Lambda\ (x\ ,\ x)\ dx \tag{54}$$

Le résultat est évident dans le cas (SB). Dans le cas (SQ), il résulte facilement des relations

$$z \frac{d}{dz} < \alpha_\Lambda z, g > = \sum_{r=0}^{\infty} r z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \alpha_\Lambda(\omega^\delta) \quad g(\omega^\delta) \tag{55}$$

$$\int \bar{\rho}_\Lambda(x , x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} \int P^j_{xx} (d\omega) dx \sum_r z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \alpha_\Lambda (\omega^\delta) g(\omega, j ; \omega^\delta) \tag{56}$$

et du fait que $r = \sum j \delta_j$.

Il résulte de (54) que Log Z est une fonction analytique de z pour $|z| < R$ ainsi qu'on l'a noté au chapitre III.

On prend alors pour Λ une sphère de rayon $L + \ell$. On appelle $V_{L+\ell}$ son volume, $\alpha_{L+\ell}$ sa fonction caractéristique et $Z_{L+\ell}$ la fonction de partition associée. (54) entraîne

$$\left| \frac{1}{V_{L+\ell}} \quad z \frac{d}{dz} \quad \text{Log } Z_{L+\ell} - \bar{\rho}_1 \right| \leq \frac{1}{V_{L+\ell}} \int \alpha_{L+\ell} (x) dx \left| \bar{\rho}_{L+\ell} (x , x) - \bar{\rho}_1 \right| \tag{57}$$

D'après le théorème (1)

$$\left| \bar{\rho}_{L+\ell} (x , x) - \bar{\rho}_1 \right| \quad \alpha_L(x) \leq \varepsilon_1(\ell, L) \tag{58}$$

D'autre part

$$\left| \bar{\rho}_{L+\ell} (x , x) \right| \leq (1 - |z|/R)^{-1} \quad M \tag{59}$$

où M est égal à (ξ/λ^ν), à $\| f_\beta \|_\infty$, à $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \xi^j/\lambda^\nu \; j^{\nu/2} \right)$ et à $\| g_\xi \|_\infty$ dans les cas (SB1), (SB2), (SQ1) et (SQ2) respectivement. On déduit de (57), (58), (59) que

$$\left| \frac{1}{V_{L+\ell}} \, z \frac{d}{dz} \, \mathrm{Log}\, Z_{L+\ell} - \bar{\rho}_1 \right| \leq \varepsilon_1(\ell, L) + 2M \left(1 - |z|/R\right)^{-1} \times$$

$$\left[1 - L^{\nu}/(L+\ell)^{\nu}\right] \qquad (60)$$

On voit facilement en revenant aux démonstrations des lemmes (1), (2) et du théorème (1) que $\varepsilon_1(\ell, L)$ tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini pour ℓ/L fixé. Ce fait est d'ailleurs évident dans les cas (SB1) et (SQ1) où ε_1 dépend seulement de ℓ et non de L. Par suite, le second membre de (60) peut être rendu arbitrairement petit uniformément en z pour $|z| \leq R' < R$ en choisissant successivement ℓ/L assez petit et ℓ assez grand. Donc $\frac{1}{V_L} \, z \frac{d}{dz} \, \mathrm{Log}\, Z$ tend vers $\bar{\rho}_1$ quand L augmente indéfiniment, uniformément en z pour $|z| \leq R' < R$. En intégrant par rapport à z, on en déduit que $\frac{1}{V_L} \, \mathrm{Log}\, Z_L$ possède une propriété semblable. Le théorème est donc démontré. La fonction limite p(z) du théorème (3) s'interprète de façon évidente comme le prolongement analytique de la pression. On peut alors inverser la série $\bar{\rho}_1(z)$ (dont le premier coefficient est 1) et substituer le résultat dans la série p(z). En d'autres termes, le développement du viriel, c'est-à-dire le développement de la pression p en série de la densité $\bar{\rho}_1$ est convergent dans un voisinage convenable de l'origine.

V - MAJORATIONS DIRECTES ET PROPRIETES DE FACTORISATION

Ce chapitre, relativement indépendant des deux précédents, exploite par des méthodes élémentaires le formalisme algébrique du chapitre II. On retrouve, en les améliorant légèrement, les majorations du chapitre III. On démontre l'existence de ρ et $\overline{\rho}$ définis formellement en remplaçant Λ par R^ν dans les définitions du chapitre II et la validité pour ces quantités de majorations identiques à celles obtenues pour ρ_Λ et $\overline{\rho}_\Lambda$. Il semble par contre difficile d'obtenir par le même procédé les théorèmes limites du chapitre IV. Au contraire, on utilise ces théorèmes pour établir l'identité de la nouvelle définition de ρ avec l'ancienne. On passe ensuite au point essentiel de ce chapitre, qui est d'établir la propriété de factorisation. Intuitivement, la matrice densité réduite à $(p + q)$ particules, quand on divise ces particules en un groupe de p et un groupe de q et qu'on fait tendre vers l'infini la distance de ces deux groupes, se factorise en le produit des matrices densités réduites de ces deux groupes. Comme en mécanique classique [9] et par une méthode analogue, on obtiendra cette propriété de factorisation des $\overline{\rho}$ sous forme d'une propriété d'intégrabilité des composantes de $\Gamma_\varepsilon^{-1}\,\overline{\rho}$. La propriété obtenue dans le cas (SB) présente une grande analogie avec celle du cas classique, tandis que celle obtenue dans le cas (SQ) est analogue à celle qu'on trouve en théorie quantique des champs. Cette dernière remarque sera utilisée au chapitre VI.

On traite successivement les cas (SB) et (SQ). Comme dans le chapitre IV, on traite simultanément les cas (SB1) et (SB2) d'une part, (SQ1) et (SQ2) d'autre part, en indiquant en cas de besoin les différences de détail.

I - STATISTIQUE DE BOLTZMANN

Dans cette section, le potentiel satisfait les conditions (A), (B) ou (B'), (C) et (D) de la section (I-1). On majore d'abord l'intégrale de $\tilde{\phi}_X(Y)$ (II-1-37).

Lemme (1-1).

$$J_n(X) = \int |\tilde{\phi}_X(\overline{\omega}^n)| \, P_{u^n, u^n}(d\overline{\omega}^n) \, du^n \leq R_{m\,n} \, \xi^m \quad (\text{cas(SB1)}) \qquad (1\text{-}1)$$

$$\leq R_{m\,n} \, \Delta(X) (\text{cas(SB2)})$$

où

$$\begin{cases} R_{m\,n} = n! \; \xi^{-1} \; R^{-(m+n-1)} & \text{pour } m > 1 \\ R_{1\,n} = n! \; \xi^{-1} \; e^{-2\beta B} \; R^{-n} & \text{pour } n \geq 1 \\ R_{1\,0} = \xi^{-1} \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

et où R est défini respectivement par (III-1-28) et (III-1-52).

Démonstration. La démonstration suit de près la référence [9]. On procède par récurrence sur m + n en utilisant la relation (II-1-52).

Pour m + n = 1, ou bien m = 0, n = 1, $\tilde{\phi}_0(1) = 0$ donc $R_{0\,1} = 0$

ou bien m = 1, n = 0, $\tilde{\phi}_1(0) = 1$ donc $R_{1\,0} = \xi^{-1}$

On suppose la propriété vraie jusqu'à m + n - 1. On symétrise la relation (II-1-52) en lui appliquant l'opérateur $\mathbb{I}$ défini par (III-1-8) et on intègre. Il vient :

$$J_n(X) \leq e^{2\beta B} \sum_{s=0}^{n} C_n^s \int \bar{P}_{u^s,u^s} (d\bar{\omega}^s)\, du^s \,|\, K(\omega,S)| \quad J_{n-s}(X' + S) \tag{1-3}$$

où $S = \bar{\omega}^s$. On considère successivement les deux cas (SB1) et (SB2).

1) Cas (SB1). On obtient

$$J_n(X) \leq e^{2\beta B} \sum_{s=0}^{n} C_n^s \xi^{m+s-1} R_{m-1+s,n-s} \int P_{u^s,u^s} (d\bar{\omega}^s) \,|\, K(\omega,\bar{\omega}^s)|\, du^s \tag{1-4}$$

$$\leq e^{2\beta B} \xi^{m-1} \sum_{s=0}^{n} C_n^s \xi^s (C(\beta))^s R_{m-1+s,n-s} \tag{1-5}$$

où $C(\beta)$ est défini par (III-1-23). Une condition suffisante pour assurer (1-1) est donc :

$$R_{m\,n} \geq e^{2\beta B} \xi^{-1} \sum_{s=0}^{n} C_n^s (\xi C(\beta))^s R_{m-1+s,n-s} \tag{1-6}$$

$$\text{ou} \quad \frac{R_{mn}}{n!} \geq e^{2\beta B} \xi^{-1} \sum_{s=0}^{n} \frac{(\xi C(\beta))^s}{s!} \frac{R_{m-1+s,n-s}}{(n-s)!} \tag{1-7}$$

qui admet trivialement la solution (1-2) avec $R = \xi \exp\left[-2\beta B - \xi C(\beta)\right]$, compte tenu du point de départ $R_{1\,0} = \xi^{-1}$

Pour $m = 1$, $n > 0$, on peut améliorer légèrement le résultat. En effet $F_1(\omega_1) = 0$ et le facteur $e^{2\beta B}$ disparaît dans (1-6), d'où la deuxième ligne de (1-2). Le lemme est donc démontré.

2) Cas (SB2). On obtient de même

$$J_n(X) \leq e^{2\beta B} \Delta(\omega^{m-1}) \sum_{s=0}^{n} C_n^s R_{m-1+s,n-s} \int P_{u^s,u^s} (d\bar{\omega}^s)\, du^s\, \Delta(\bar{\omega}^s) \,|\, K(\omega,\bar{\omega}^s)| \tag{1-8}$$

d'où on déduit la condition suffisante

$$\frac{R_{m\,n}}{n!} \geq e^{2\beta B} \sup_{\omega} \Delta(\omega)^{-1} \sum_{s=0}^{n} \frac{R_{m-1+s,n-s}}{(n-s)!} \times \frac{1}{s!} \int P_{u^s,u^s} (d\bar{\omega}^s)\, du^s$$

$$\Delta(\bar{\omega}^s)\ |K(\omega,\bar{\omega}^s)| \qquad (1\text{-}9)$$

L'inéquation (1-9), compte tenu de (III-1-36), (III-1-52) et du point de départ $R_{1\,0} = \xi^{-1}$, admet la solution (1-2). Comme précédemment, on gagne un facteur $e^{2\beta B}$ pour $m = 1$, $n > 0$. Le lemme est donc démontré.

Remarque. Dans le cas (SB1), on peut obtenir un résultat un peu plus fin en résolvant exactement l'inéquation (1-6). On pose $P_{m\,n} = \xi^m R_{m\,n}$. Le système (1-6) devient

$$P_{m\,n} \geq e^{2\beta B} \sum_{s=0}^{n} C_n^s \,(C(\beta))^s\, P_{m-1+s,n-s} \qquad (1\text{-}10)$$

La meilleure solution de ce système, c'est-à-dire celle qui donne l'égalité, est [5] :

$$P_{m\,n} = m\,(m+n)^{n-1}\,(C(\beta))^n \exp\left[2(m+n-1)\,\beta\,B\right] \text{ pour } m > 1$$

$$P_{1\,n} = (n+1)^{n-1}\,(C(\beta))^n \exp\left[2(n-1)\,\beta\,B\right] \qquad \text{pour } n \geq 1 \qquad (1\text{-}11)$$

$$P_{1\,0} = 1$$

où on a utilisé le point de départ $P_{1\,0} = 1$, et l'amélioration du résultat pour $m = 1$. Cette majoration est légèrement meilleure que celle qu'on déduit de (1-1) en prenant pour ξ la valeur la plus favorable $\xi = (C(\beta))^{-1}$, et qui se réduit à

$$J_n(X) \leq n!\ e^{m+n-1}\ (C(\beta))^n\ \exp\left[2\beta B\ (m+n-1)\right] \text{ pour } m > 1 \qquad (1\text{-}12)$$

et analogue pour $m = 1$.

Cette remarque ne s'étend pas au cas (SB2) et ne sera pas utilisée par la suite.

On déduit facilement du lemme (1-1) la convergence absolue pour $|z| < R$ des séries ψ_Λ et ρ_Λ définies par (II-1-35) et (II-1-36) ainsi que des séries analogues correspondant au volume infini et obtenues formellement en remplaçant α_Λ par 1 dans ces définitions

$$\psi'(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int P_{y^n,y^n}(d\overline{\omega^n})\ dy^n\ \tilde{\phi}_X(\overline{\omega^n}) \qquad (1\text{-}13)$$

$$\rho'(X) = z^m\ \psi'(X) \qquad (1\text{-}14)$$

La convergence est uniforme en z pour $|z| \leq R' < R$, et uniforme en X dans le cas (SB1). On obtient de plus les majorations suivantes, valables à volume f fini (pour ψ_Λ, ρ_Λ) ou infini (pour ψ', ρ'), et écrites ci-dessous pour ces derniers :

$$|\psi'(X)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}\ J_n(X) \qquad (1\text{-}15)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n\ \xi^{-1}\ R^{-(m+n-1)}\ \Delta(X) \qquad (1\text{-}16)$$

$$= \xi^{-1}\ R^{-(m-1)}\ (1 - |z|/R)^{-1}\ \Delta(X) \qquad (1\text{-}17)$$

$$\text{d'où } |\rho'(X)| \leq \frac{|z|}{\xi}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{m-1} (1 - |z|/R)^{-1}\ \Delta(X) \qquad (1\text{-}18)$$

Ces majorations sont écrites pour le cas (SB2).On obtient le cas (SB1) en y remplaçant $\Delta(X)$ par ξ^m. La majoration (1-18) est meilleure que celle du chapitre III,(III-1-29) et (III-1-53) par un facteur $(|z|/R)^{m-1}$.

On compare maintenant $\rho'(X)$ défini par (1-14) avec $\rho(X)$ défini au chapitre IV. On a vu dans ce chapitre que $\rho_\Lambda(X)$ tend vers $\rho(X)$ uniformément pour $|z| \leq R' < R$. Par suite, pour X fixé, les coefficients du développement de ρ_Λ en série de z :

$$\frac{1}{n!}\ \alpha_\Lambda(X) \int P_{u^n,u^n}(d\bar{\omega}^n)\ \alpha_\Lambda(\bar{\omega}^n)\ \tilde{\phi}_X(\bar{\omega}^n) \qquad (1\text{-}19)$$

tendent vers les coefficients correspondants du développement de $\rho(X)$ en série de z. Mais il est immédiat que les coefficients (1-19) tendent, quand Λ devient infini, vers les coefficients de $\rho'(X)$. Par suite, $\rho'(X)$ défini par (1-14) est identique à $\rho(X)$ défini au chapitre IV. On garde la notation unique $\rho(X)$. On peut alors étendre au cas du volume infini les considérations algébriques du chapitre II qui faisaient intervenir Λ explicitement. En particulier, on définit χ, $\bar{\chi}$ et ϕ par

$$\rho = \Gamma\ \chi \qquad (1\text{-}20)$$

$$\bar{\rho} = \Gamma_\varepsilon\ \bar{\chi} \quad \text{ou} \quad \bar{\chi} = J_\varepsilon\ \chi \qquad (1\text{-}21)$$

$$\chi(X) = z^m\ \phi(X) \qquad (1\text{-}22)$$

$$\phi(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int P_{u^n,u^n}(d\bar{\omega}^n)\ du^n\ D_X\ g(\bar{\omega}^n) \qquad (1\text{-}23)$$

Le lemme (II-1-4) et le théorème (II-1-1) s'appliquent sans modification au cas du volume infini.

On considère maintenant quelques cas particuliers où on peut obtenir des majorations légèrement plus fines que celles du lemme (1-1). On considère d'abord le cas particulier, contenu dans (SB1), des potentiels sans coeur dur et purement répulsifs, c'est-à-dire satisfaisant les conditions (A), (B), (C) (E). On va montrer que dans ce cas :

$$J_n(X) \leq R_{m\,n}\ \xi^m\ \exp\left[-\ U(X)\right] \qquad (1\text{-}24)$$

où $R_{m\,n}$ est donné par (1-2) avec maintenant $B = 0$, $R = \xi \exp\left[-\ \xi C(\beta)\right]$ et $C(\beta) = (1/\lambda^\nu)\ \beta \int \phi(x)\ dx$.

La démonstration procède par récurrence sur m + n et utilise la relation (II-1-52). Le point de départ de la récurrence est le même que dans le lemme (1-1). On suppose (1-24) vraie jusqu'à (m + n - 1). On déduit alors de (II-1-52) :

$$J_n(X) \leq \exp\left[- U(X) \right] \sum_{s=1}^{n} C_n^s \; R_{s,n-s} \; (m\, C(\beta))^s \; \xi^s \qquad (1\text{-}25)$$

où on a utilisé la relation :

$$\operatorname*{Sup}_X \int P_{uu} \; (d\bar{\omega}) \; du \left| K(X,\bar{\omega}) \right| \leq m\, C(\beta) \qquad (1\text{-}26)$$

qu'on établit facilement par les méthodes de la section (III-1). La somme sur s commence à s = 1 et non à s = 0, car on voit directement que $R_{on} = 0$ pour $n \geq 1$.

Une condition suffisante pour assurer (1-24) est donc

$$R_{m\,n} \geq \sum_{s=1}^{n} C_n^s \quad R_{s,n-s} \; (m\, C(\beta))^s \quad \xi^{s-m} \qquad (1\text{-}27)$$

Cette condition est trivialement vérifiée par les $R_{m\,n}$ du lemme (1-1) correspondant à B = 0. Le résultat est donc démontré. On peut l'améliorer, comme précédemment, en déterminant la meilleure solution de (1-27), c'est-à-dire celle qui réalise l'égalité. On trouve

$$J_n(X) \leq P_{m\,n} \; \exp\left[- U(X) \right] \qquad (1\text{-}28)$$

avec $P_{m\,n} = m(m+n)^{n-1} \; (C(\beta))^n$ (1-29)

C'est l'expression (1-11) correspondant à B = 0. De (1-24) on tire immédiatement :

$$|\rho(X)| \leq \left|\frac{z}{\xi}\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{m-1} \quad (1 - |z|/R)^{-1} \; \xi^m \; \exp\left[- U(X) \right] \qquad (1\text{-}30)$$

Les majorations ainsi obtenues sont meilleures que celles du lemme (1-1) par un facteur $\exp\left[- U(X)\right] \leq 1$

Le potentiel satisfaisant toujours (A), (B), (C) et (E), on peut obtenir directement des majorations plus fines pour z physique, c'est-à-dire réel positif. Le potentiel étant positif, on a

$$\exp\left[- U\left(\omega^{m+n}\right)\right] \leq \exp\left[- U(\omega^{m})\right] \exp\left[- U(\omega^{n})\right] \qquad (1\text{-}31)$$

On reporte (1-31) dans la définition de ρ_{Λ}(I-3-28). Utilisant le fait que les deux séries au numérateur et au dénominateur sont à termes positifs, on obtient

$$0 \leq \rho_{\Lambda}(X) \leq z^{m} \exp\left[- U(X)\right] \qquad (1\text{-}32)$$

La même majoration vaut pour $\rho(X)$ par passage à la limite.

On considère maintenant le cas analogue des potentiels satisfaisant les conditions (A), (B'), (C) et (F). On montre que dans ce cas :

$$J_{n}(X) \leq R'_{m\,n}\, \Delta(X) \exp\left[- U(X)\right] \qquad (1\text{-}33)$$

où maintenant

$$R'_{m\,n} = n!\ e^{n\beta B}\ \xi^{-(m+n)} = n!\ e^{-m\beta B}\ R'^{-(m+n)} \qquad (1\text{-}34)$$

avec $R' = \xi \exp(-\beta B) = R \exp \beta B \ (>R)$ (1-35)

La démonstration procède comme précédemment par récurrence sur (m + n) avec le même point de départ $R'_{1\,0} = \xi^{-1}$, $R'_{0\,1} = 0$. On déduit de (II-1-53)

$$J_{n}(X) \leq \exp\left[- U(X)\right] \sum_{s=1}^{n} C_{n}^{s} \int P_{u^{s},u^{s}}(d\bar{\omega}^{s})\, du^{s}\, |K(X,S)|\, J_{n-s}(S) \qquad (1\text{-}36)$$

où $S = \bar{\omega}^S$. Utilisant l'hypothèse de récurrence, on substitue au second membre la majoration (1-33) pour $J_{n-s}(S)$. $\exp\left[-U_s(S)\right]$ est majoré par $e^{s\beta B}$, en vertu de la condition (D), conséquence de (F). On obtient :

$$J_n(X) \leq \exp\left[-U(X)\right] \sum_{s=1}^{n} C_n^s \; R'_{s,n-s} \; e^{s\beta B} \left[\int P_{uu}(d\bar{\omega})\, du\, \Delta(\bar{\omega}) \mid K(X,\bar{\omega})\mid\right]^s \tag{1-37}$$

Une condition suffisante pour assurer (1-33) est donc

$$R'_{m\,n} \geq \sup_{X(m)} \frac{1}{\Delta(X)} \sum_{s=1}^{n} C_n^s \; R'_{s,n-s} \; e^{s\beta B} \left[\ldots\right]^s \tag{1-38}$$

Ceci suggère de chercher $R'_{m\,n}$ sous la forme $R'_{m\,n} = n!\, e^{n\beta B}\, R''_{m+n}$. On obtient

$$R''_{m+n} \geq \sup_{X(m)} \Delta(X)^{-1} \; R''_n \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s!} \left[\ldots\right]^s \tag{1-39}$$

On obtient une condition suffisante en abandonnant la restriction $s \leq n$. D'autre part

$$\int P_{uu}(d\bar{\omega})\, du\, \Delta(\bar{\omega})\; |K(X,\bar{\omega})| \leq \int P_{OO}(d\bar{\omega})\; \Delta(\bar{\omega}) \left[\sum_{i=1}^{m} v(\omega_i - \bar{\omega}) + m\,A\right] \tag{1-40}$$

où A est donné par (III-1-42). Comparant (1-39), (1-40) avec (III-1-43) on trouve

$$R''_{m+n} \geq \xi^{-m}\; R''_n \tag{1-41}$$

qui compte tenu du point de départ $R''_1 = \xi^{-1}$, donne immédiatement le résultat (1-34). En reportant la majoration (1-33) dans la définition de ρ, on trouve :

$$|\rho(X) \leq \left(\frac{|z|}{R'}\right)^m \; (1 - |z|/R')^{-1} \; \exp\,(-m\beta\, B) \; \exp\left[-U(X)\right] \Delta(X) \tag{1-42}$$

$$= \left(\frac{|z|}{\xi}\right)^m \; (1 - |z|/R')^{-1} \; \exp\left[-U(X)\right] \Delta(X) \tag{1-43}$$

Non seulement on a obtenu une meilleure majoration de ρ, mais en outre on a trouvé un rayon de convergence R' de son développement en z supérieur à R.

Le potentiel satisfaisant toujours (A), (B'), (C), (F), on obtient une majoration plus fine pour z physique, c'est-à-dire réel positif. La condition (F) entraîne :

$$\exp\left[-U(\omega^{m+n})\right] \leq \exp\left[-U(\omega^{m})\right] \exp(2m\beta B) \exp\left[-U(\omega^{n})\right] \quad (1\text{-}44)$$

On en déduit comme précédemment que pour z réel positif :

$$0 \leq \rho_{\Lambda}(X) \leq \left[z \exp(2\beta B)\right]^{m} \exp\left[-U(X)\right] \quad (1\text{-}45)$$

$\rho(X)$ admet la même majoration, par passage à la limite.

En intégrant sur ω^m les bornes trouvées pour $\rho(\omega^m)$, on obtient facilement des bornes sur les composantes de $\bar{\rho}$, c'est-à-dire les MDR.

On revient aux potentiels satisfaisant seulement les conditions (A), (B) ou (B'), (C), et (D), et on établit la propriété de factorisation. On définit dans le cas (SB2) une fonction h(x) par :

$$h(x) = \sup_{\omega}\left\{\int P_{0x}\, d\bar{\omega}\ (v(\omega-\bar{\omega}) + A)\ \Delta(\bar{\omega}) \Big/ \int P_{00}(d\bar{\omega})(v(\omega-\bar{\omega}) + A)\ \Delta(\bar{\omega})\right\} \quad (1\text{-}46)$$

Il est clair que $h(0) = 1$. On montre en appendice (A-1) que h est une fonction bornée intégrable de x et qu'elle satisfait

$$h(x) \geq f_{\beta}(x) / f_{\beta}(0) \quad (1\text{-}47)$$

où $f_{\beta}(x) = \int P_{0x}(d\omega)\ \Delta(\omega)$. On pose $\int h(x)\, dx = \| h \|_1$ et $h(x^n) = \prod_{i=1}^{n} h(x_i)$

Dans le cas (SB1), $v(\omega-\bar{\omega})$ est nul, $\Delta(\bar{\omega})$ est constant, et $h(x)$ se réduit à $\lambda^{\nu}\ \psi_{\beta}(x)$, où $\psi_{\beta}(x)$ est défini par (I-3-14).

On traite simultanément les cas (SB1) et (SB2). Le premier s'obtient a partir du second en remplaçant $\Delta(\omega)$ par ξ, et $h(x)$ par $\lambda^{\nu}\psi_{\beta}(x)$.

Lemme (1-2).

$$\int |\tilde{\delta}_{\chi}(\bar{\omega}^n)|\ P_{u^n,u^n+v^n}(d\bar{\omega}^n)\ du^n \leq R_{m\,n}\ \xi^m\ \lambda^{\nu n}\ \psi_{\beta}(v^n) \quad (\text{cas(SB1)}) \qquad (1\text{-}48)$$

$$\leq R_{m\,n}\ \Delta(X)\ h(v^n) \quad (\text{cas(SB2)}) \qquad (1\text{-}49)$$

Démonstration . La démonstration est analogue a celle du lemme (1-1), à laquelle on se ramène immédiatement en remarquant que

$$\int P_{u,u+v}\ (d\bar{\omega})\ du\ |K(\omega,\bar{\omega})| \leq \lambda^{\nu}\ \psi_{\beta}(v)\ \ C(\beta) \quad \text{dans le cas (SB1)} \qquad (1\text{-}50)$$

$$\int P_{u,u+v}\ (d\bar{\omega})\ du\ |K(\omega,\bar{\omega})|\ \Delta(\bar{\omega}) \leq h(v) \int P_{00}(d\bar{\omega})\ (v(\omega-\bar{\omega}) + A)\ \Delta(\bar{\omega})$$

dans le cas (SB2) (1-51)

On peut maintenant établir la propriété de factorisation sous la forme suivante :

Théorème (1-1). Pour $|z| < R$, les fonctions $\bar{\chi}(x^m,y^m)$ sont des fonctions absolument intégrables des différences de leurs arguments. De plus :

$$\int |\bar{\chi}(x^m,v^m)|\ dx^{m-1}\ dy^m \leq (m-1)\ !\ \left(\frac{|z|/R}{1-|z|/R}\right)^m\ R\ \ e^{-2\beta B}\ \lambda^{\nu(m-1)}$$

dans le cas (SB1) (1-52)

$$\ldots \leq (m-1)\,! \left(\frac{|z|/R}{1-|z|/R}\right)^m e^{-4\beta B} f_\beta(0) \|h\|_1^m \quad \text{dans le cas (SB2)} \tag{1-53}$$

Démonstration. La démonstration est la même qu'en mécanique classique [9].
On déduit de (1-23) :

$$H(v^{m-1}) \equiv \int |\phi(\omega^m)|\, P_{u^{m-1},(u+v)^{m-1}}(d\omega^{m-1})\, du^{m-1}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \int P_{u^{m-1},(u+v)^{m-1}}(d\omega^{m-1})\, du^{m-1}\, P_{y^n,y^n}(d\bar{\omega}^n)\, dy^n\, |D_X g(\bar{\omega}^n)| \tag{1-54}$$

Mais d'après (II-1-43) :

$$D_X g(\bar{\omega}^n) = g(X, \bar{\omega}^n) = D_\omega\, g(\omega^{m-1}, \bar{\omega}^n) = \tilde{\phi}_\omega(\omega^{m-1}, \bar{\omega}^n) \tag{1-55}$$

Ceci permet de substituer dans (1-54) la majoration de lemme (1-2). On obtient

1) Cas (SB1)

$$H(v^{m-1}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\, \xi\, R_{1,m+n-1}\, \lambda^{\nu(m-1)}\, \psi_\beta(v^{m-1}) \tag{1-56}$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{R^{m+n-1}} \frac{(m+n-1)!}{n!}\, e^{-2\beta B}\, \lambda^{\nu(m-1)}\, \psi_\beta(v^{m-1}) \tag{1-57}$$

On utilise, pour sommer la série (1-57), la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (m+n-1)!}{n!} = \frac{(m-1)!}{(1-\zeta)^m} \tag{1-58}$$

d'où

$$H(v^{m-1}) \leq (m-1)!\, e^{-2\beta B}\, R^{-(m-1)}\, (1-|z|/R)^{-m}\, \lambda^{\nu(m-1)}\, \psi_\beta(v^{m-1}) \tag{1-59}$$

On intègre (1-59) sur la dernière trajectoire :

$$\int |\phi(\omega^m)|\, P_{u^m, u^m+v^m}(d\omega^m)\, du^{m-1} \leq (m-1)!\, e^{-2\beta B} R^{-(m-1)} \quad \times$$

$$(1-|z|/R)^{-m} \quad \lambda^{\nu(m-1)} \quad \psi_\beta(v^m) \tag{1-60}$$

On reporte (1-60) dans la définition de $\bar{\chi}$. Finalement

$$\int |\bar{\chi}(x^m, x^m+v^m)|\, dx^{m-1} \leq (m-1)! \left(\frac{|z|/R}{1-|z|/R}\right)^m R\, e^{-2\beta B}\, \lambda^{\nu(m-1)}\, \psi_\beta(v^m) \tag{1-61}$$

Le théorème (1-1) en résulte immédiatement par intégration sur v^m.
Le résultat obtenu sous la forme (1-61) est en fait légèrement plus fin : il signifie que la fonction $\bar{\chi}(x^m, y^m)$ est une fonction absolument intégrable des distances entre les m couples (x_j, y_j), et qu'en outre elle décroit exponentiellement comme fonction des distances $|v_j| = |x_j - y_j|$ des deux points de chaque couple.

---

2) Cas (SB2)

$$H(v^{m-1}) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}\, \Delta(\omega)\, R_{1,m+n-1}\, h(v^{m-1}) \tag{1-62}$$

$$\leq (m-1)!\, e^{-2\beta B} R^{-(m-1)} (1-|z|/R)^{-m}\, \xi^{-1}\, \Delta(\omega)\, h(v^{m-1}) \tag{1-63}$$

par le même calcul que précédemment.

On intègre sur la dernière trajectoire, ce qui introduit un facteur $\int P_{0v}(d\omega)\, \Delta(\omega) = f_\beta(v)$. On utilise la relation $h(x) \geq f_\beta(x)/f_\beta(0)$ pour obtenir un résultat un peu plus faible, mais symétrique par rapport aux points v^m. On reporte la majoration obtenue dans la définition de $\bar{\chi}$ et on obtient comme précédemment :

$$\int |\bar{\chi}\,(x^m, x^m + v^m)|\, dx^{m-1} \leq (m-1)\,! \left(\frac{|z|/R}{1-|z|/R}\right)^m e^{-4\beta B}\, f_\beta(0)\, h(v^m) \qquad (1\text{-}64)$$

où on a utilisé la relation $R = \xi \exp(-2\beta B)$. Le théorème résulte immédiatement de (1-64) par intégration sur v^m. La forme non intégrée (1-64) est moins intéressante que dans le cas (SB1), car la fonction h est mal connue. La décroissance de (1-64) quand les $|v_j|$ augmentent indéfiniment est moins rapide que dans le cas (SB1).

---

2 - STATISTIQUES QUANTIQUES

Les notations sont celles de la section (II-2). Le potentiel satisfait les conditions (A) (B) (C) (E) dans le cas (SQ1) et (A) (B') (C) (F) dans le cas (SQ2). On majore d'abord l'intégrale de $\tilde{\phi}_X(Y)$.

Lemme (2-1)

$$J_r(X) = \sum_{\delta(r)} \int d_+\omega^\delta\, |\tilde{\phi}_X(\omega^\delta)| \leq R(q,r)\, \xi^q \qquad \text{(cas(SQ1))} \qquad (2\text{-}1)$$

$$\leq R(q,r)\, \Delta(X) \qquad \text{(cas(SQ2))} \qquad (2\text{-}2)$$

où $\begin{cases} R(q,r) = \xi^{-1}\, R^{-(q+r-1)} & \text{pour } q \geq 1 \\ R(0,r) = \delta_{0,r} \end{cases}$

et où R est donné par (III-2-23) dans le cas (SQ1) et (III-2-32) dans le cas (SQ2).

Démonstration . On procède par récurrence sur q+r en utilisant la relation (II-2-52). Le point de départ est q+r = 1. Dans ce cas

$$\text{ou bien } q = 0,\ r = 1,\ \tilde{\phi}_0(1) = 0 \quad R(0,1) = 0$$

$$\text{ou bien } q = 1,\ r = 0,\ \tilde{\phi}_1(0) = 1 \quad R(1,0) = \xi^{-1}$$

Il est d'ailleurs immédiat que $\tilde{\phi}_0(Y) = 0$ pour $r \geq 1$.

On suppose la propriété vraie jusqu'à q+r-1. On symétrise la relation (II-2-52) comme dans la section (III-2) et on intègre sur Y. Il vient :

$$J_r(X) \leq \sup_{k(\gamma_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sum_{\delta(r)} \sum_{S \subset Y} \int d^+\omega^\delta \, |K(\omega,k\,;S)| \, |\tilde{\phi}_{X'+S}(Y-S)| \qquad (2\text{-}4)$$

avec $Y = \omega^\delta$, $S = \omega^{\delta'}$, $\delta' \leq \delta$. La somme sur S se réduit à $\sum_{\delta' \leq \delta} \prod_j C_{\delta_j}^{\delta'_j}$, ce qui combiné avec (II-2-34), donne

$$J_r(X) \leq \sup_{k(\gamma_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sum_{\delta(r)} \sum_{\delta' \leq \delta} \int d_+\omega^{\delta'} \, |K(\omega,k\,;\omega^{\delta'})| \, d_+\omega^{\delta''} \, |\tilde{\phi}_{X'+S}(\omega^{\delta''})| \qquad (2\text{-}5)$$

$$\text{Mais} \sum_{\delta(r)} \sum_{\delta' \leq \delta} = \sum_{r'=0}^{r} \sum_{\delta'(r')} \sum_{\delta''(r-r')} \qquad (2\text{-}6)$$

On regroupe la somme sur δ'' et la dernière intégrale et on utilise l'hypothèse de récurrence. On traite séparément les deux cas (SQ1) et (SQ2).

1) Cas (SQ1). On rappelle que B = 0. Il vient :

$$J_r(X) \leq \sup_{k(\gamma_k \geq 1)} \sum_{r'=0}^{r} \sum_{\delta'(r')} \xi^{q-k+r'} \, R(q-k+r', r-r') \int d_+\omega^{\delta'} \times$$

$$|K(\omega,k\,;\omega^{\delta'})| \qquad (2\text{-}7)$$

$$\leq \sup_{1\leq k\leq q} \sum_{r'=0}^{r} \xi^{q-k+r''} R(q-k+r', r-r') \sum_{\delta'(r')} \prod_j \frac{1}{\delta'_j!} k^{\delta'_j} \left[\frac{A(\beta)}{\lambda^{\nu_j} \nu/2}\right]^{\delta'_j} \tag{2-8}$$

Ceci suggère de chercher une solution du type $R(q,r) = R(q+r)$. On obtient alors

$$J_r(X) \leq \sup_{1\leq k\leq q} \xi^{q-k} R(q-k+r) \sum_{r'=0}^{r} \sum_{\delta'(r')} \prod_j \frac{1}{\delta'_j!} \left[k \frac{A(\beta)}{\lambda^{\nu_j}} \frac{\xi^j}{\nu/2}\right]^{\delta'_j} \tag{2-9}$$

On majore la dernière somme en abandonnant la restriction $r' \leq r$. Cette somme se recombine en une exponentielle, et on obtient :

$$J_r(X) \leq \sup_{1\leq k\leq q} \xi^{q-k} R(q-k+r) \exp\left[k\, D(\beta)\right] \tag{2-10}$$

où $D(\beta)$ est donné par (III-2-22). Une condition suffisante pour assurer le lemme est alors

$$R(q+r) \geq \sup_{1\leq k\leq q} R(q-k+r) \left[\xi^{-1} \exp\left(D(\beta)\right)\right]^k \tag{2-11}$$

qui compte tenu du point de départ $R(1) = \xi^{-1}$, et de (III-2-23), admet trivialement la solution $R(q,r) = R(q+r) = \xi^{-1} R^{-(q+r-1)}$. Le lemme est donc démontré.

2) Cas (SQ2). Il vient de même

$$J_r(X) \leq \sup_k e^{2k\beta B} \sum_{r'=0}^{r} R(q-k+r', r-r') \Delta(X) \Delta(\omega,k)^{-1} \sum_{\delta'(r')} \int d_+ \omega^{\delta'} \left| K(\omega,k\,;\,\omega^{\delta'})\right| \Delta(\omega^{\delta'}) \tag{2-12}$$

On cherche encore une solution du type $R(q,r) = R(q+r)$. On majore la somme sur r' en abandonnant la restriction $r' \leq r$. la somme sur r', δ' se recombine pour donner (III-2-29), ce qui permet d'utiliser (III-2-30) et d'obtenir :

$$J_r(X) \leq \Delta(X) \sup_{1 \leq k \leq q} e^{2k\beta B} \xi^{-k} R(q+r-k) \qquad (2\text{-}13)$$

Une condition suffisante pour assurer le lemme est alors :

$$R(q+r) \geq \sup_{1 \leq k \leq q} (\xi^{-1} e^{2\beta B})^k R(q+r-k) \qquad (2\text{-}14)$$

qui compte tenu du point de départ $R(1) = \xi^{-1}$ et de (III-2-32) donne la solution $R(q,r) = R(q+r) = \xi^{-1} R^{-(q+r-1)}$. Le lemme est donc démontré.

On déduit de lemme (2-1), comme dans la section (1), la convergence absolue pour $|z| < R$ des séries ψ_Λ et ρ_Λ définies par (II-2-42,43), ainsi que des séries analogues correspondant au volume infini

$$\psi(X) = \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta \tilde{\phi}_X(\omega^\delta) \qquad (2\text{-}15)$$

$$\rho(X) = z^q \psi(X) \qquad (2\text{-}16)$$

La convergence est uniforme en z pour $|z| \leq R' < R$ et uniforme par rapport à X dans le cas (SQ1). On obtient de plus , à volume fini ou infini, les majorations suivantes :

$$|\psi(X)| \leq \sum_{r=0}^{\infty} |z|^r J_r(X) \qquad (2\text{-}17)$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} |z|^r \xi^{-1} R^{-(q+r-1)} \Delta(X) \qquad (2\text{-}18)$$

$$\leq \xi^{-1} R^{-(q-1)} (1 - |z|/R)^{-1} \Delta(X) \qquad (2\text{-}19)$$

et $|\rho(X)| \leq \frac{|z|}{\xi}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{q-1} \quad (1 - |z|/R)^{-1} \quad \Delta(X)$ (2-20)

Ces majorations sont relatives au cas (SQ2) ; le cas (SQ1) s'en déduit en remplçant $\Delta(X)$ par ξ^q. La majoration (2-20) est meilleure que celles du chapitre III, (III-2-25) et (III-2-42) par un facteur $(|z|/R)^{q-1}$.

On montre comme dans la section précédente que $\rho(X)$ défini par (2-15,16) coïncide avec celui défini au chapitre IV. On définit χ, $\overline{\chi}$ et ϕ par :

$$\rho = \Gamma \chi \tag{2-21}$$

$$\overline{\rho} = \Gamma_\varepsilon \overline{\chi} \quad \text{ou} \quad \overline{\chi} = J_\varepsilon \chi \tag{2-22}$$

$$\chi(X) = z^q \phi(X) \tag{2-23}$$

$$\phi(X) = \sum_{r=0}^{\infty} z^r \sum_{\delta(r)} \int d_\varepsilon \omega^\delta D_X g(\omega^\delta) \tag{2-24}$$

Le lemme (II-2-6) et le théorème (II-2-2) s'appliquent sans modification au cas du volume infini.

On exploite maintenant la relation (II-2-55) pour améliorer les majorations du lemme (2-1).

Lemme (2-2) : Dans le cas (SQ1) :

$$J_r(X) \leq R'(q,r) \; \xi^q \; \exp\left[-U(X)\right] \tag{2-25}$$

où $R'(q,r)$ est identique à $R(q,r)$ défini dans le lemme (1-1)

Dans le cas (SQ2) :

$$J_r(X) \leq R'(q,r) \; \Delta(X) \; \exp\left[-U(X)\right] \tag{2-26}$$

où $R'(q,r) = e^{r\beta B} \; \xi^{-(q+r)} = e^{-q\beta B} \; R'^{-(q+r)}$ (2-27)

où $R' = \zeta \, e^{-\beta B} = R \, e^{\beta B}$ (2-28)

Démonstration . On procède par récurrence sur (q+r) avec le même point de départ que dans le lemme (2-1) : $R'(1,0) = \xi^{-1}$, $R'(0,1) = 0$. De plus, $R'(0,r)$ est nul pour $r \geq 1$.

On utilise la relation(II-2-55). On somme sur δ et on intègre. Il vient :

$$J_r(X) \leq \exp\left[-U(X)\right] \sum_{r'=1}^{r} \sum_{\delta'(r')} \int d_+ \omega^{\delta'} \, |K(X,S)| \, J_{r-r'}(S) \qquad (2\text{-}29)$$

où $S = \omega^{\delta'}$. On traite séparément (SQ1) et (SQ2).

1) Cas (SQ1). Utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$J_r(X) \leq \exp\left[-U(X)\right] \sum_{r'=1}^{r} R'(r',r-r') \, \xi^{r'} \sum_{\delta'(r')} \int d_+ \omega^{\delta'} \, |K(X,S)| \qquad (2\text{-}30)$$

Une condition suffisante pour assurer le lemme est donc

$$R'(q,r) \, \xi^{q} \geq \sum_{r'=1}^{r} R'(r', r-r') \, \xi^{r'} \sum_{\delta'(r')} \int d_+ \omega^{\delta'} \, |K(X,S)| \qquad (2\text{-}31)$$

Ceci suggère de chercher $R'(q,r)$ sous la forme $R'(q,r) = \xi^{-(q+r)} R''(q+r)$. On abandonne dans (2-31) la restriction $1 \leq r' \leq r$, ce qui permet d'effectuer la somme. Finalement, on obtient la condition suffisante

$$R''(q+r) \geq R''(r) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi^j}{j} \int P_{uu}^{j} \, (d\bar{\omega}) \, du \, |K(X\,;\,\bar{\omega},j)| \right\} \qquad (2\text{-}32)$$

On voit facilement que l'exposant est majoré par $q\,D(\beta)$ où $D(\beta)$ est défini par (III-2-22). (2-32) admet donc la solution $R''(p) = \text{constante} \cdot \exp\left[p\,D(\beta)\right]$, qui combinée avec le point de départ de la récurrence donne le résultat du lemme (2-2).

2) Cas (SQ2) On obtient de même

$$J_r(X) \leq \exp\left[-U(X)\right] \sum_{r'=1}^{r} R'(r',r-r') \, e^{r'\beta B} \sum_{\delta'(r')} \int d_+ \omega^{\delta'} \, |K(X,S)| \, \delta(S)$$

(2-33)

Une condition suffisante pour assurer le lemme est donc :

$$R'(q,r) \geq \sup_{X(q)} \Delta(X)^{-1} \sum_{r'=1}^{r} R'(r',r-r')\, e^{r'\beta B} \sum_{\delta'(r')} \int d_+\omega^{\delta'} \,|\, K(X,S)\,|\Delta(S) \tag{2-34}$$

Ceci suggère de chercher $R'(q,r)$ sous la forme $R'(q,r) = e^{r\beta B}\ R''(q+r)$. D'où

$$R''(q+r) \geq R''(r) \sup_{X(q)} \Delta(X)^{-1} \sum_{r'} \sum_{\delta'(r')} \int (\text{idem}) \tag{2-35}$$

On montre facilement que :

$$\frac{1}{j} \int P_{uu}^{j}\ (d\bar{\omega})\ du\ \Delta(\bar{\omega},j)\,|\,K(X\ ;\ \bar{\omega},j)\,| \leq \int P_{00}^{j}\ (d\bar{\omega})\ \Delta(\bar{\omega},j) \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{1}{j}\ v(\omega_k,\bar{\omega}) + j_k\ e^{2j\beta B}\ A_- + j_k\ A_+ \right] \right\} \tag{2-36}$$

avec les mêmes notations que dans (III-2-34). Il résulte alors immédiatement de (III-2-34) que (2-35) admet la solution $R''(p) = \xi^{-p}$. Le lemme est donc démontré.

Reportant dans la définition de ρ les majorations du lemme (2-2), on obtient respectivement

$$|\rho(X)| \leq \frac{|z|}{\xi} \left(\frac{|z|}{R} \right)^{q-1} (1 - |z|/R)^{-1}\ \xi^{q}\ \exp\left[- U(X) \right] \tag{2-37}$$

dans le cas (SQ1)

$$|\rho(X)| \leq \left(\frac{|z|}{R'} \right)^{q} (1 - |z|/R')^{-1}\ e^{-q\beta B}\ \exp\left[- U(X) \right] \Delta(X) \tag{2-38}$$

dans le cas (SQ2)

Dans le cas (SQ2), on a donc légèrement amélioré le rayon de convergence du développement en z.

Pour les valeurs physiques, c'est-à-dire réelles positives, de z, mais dans le seul cas de la statistique de Bose-Einstein, on peut obtenir directement une majoration plus fine de ρ. La condition (F) entraîne :

$$\exp\left[-U(\omega^\gamma, \omega^\delta)\right] \leq \exp\left[-U(\omega^\gamma)\right] \exp(2q\beta B) \exp\left[-U(\omega^\delta)\right] \quad (2\text{-}39)$$

(avec B = 0 dans le cas (SQ1)). Comparant avec la définition de ρ_Λ(I-3-47) on obtient, pour des bosons ($\varepsilon = +1$)

$$0 \leq \rho_\Lambda(\omega^\gamma) \leq z^q \exp(2q\beta B) \exp\left[-U(X)\right] \quad (2\text{-}40)$$

Dans le cas (SQ1), (2-40) se réduit à

$$0 \leq \rho_\Lambda(\omega^\gamma) \leq z^q \exp\left[-U(X)\right] \quad (2\text{-}41)$$

Les deux dernières majorations s'appliquent aussi à $\rho(X)$ par passage à la limite.

Toutes les majorations obtenues pour ρ donnent, par intégration, des majorations correspondantes des composantes de $\bar{\rho}$, c'est-à-dire des MDR.

On établit maintenant la propriété de factorisation sous forme d'une condition d'intégrabilité absolue des composantes de $\bar{\chi}$, considérées comme fonctions des différences de leurs arguments. On pose

$$\underline{d\omega^\delta} = \prod_j \frac{1}{\delta_j!} \left(P^j_{xy} (d\omega)\, dx\, dy\right)^{\delta_j} \quad (2\text{-}42)$$

$$T = \omega^\theta \quad , \quad \theta = (\theta_j) \qquad |\theta| = \sum j\, \theta_j = t \quad (2\text{-}43)$$

On définit

$$J_{mp}(T) = \sum_{q+r=p} \sum_{\gamma(m,q)} \sum_{\delta(r)} \int \underline{d\omega^\gamma}\; d_+\, \omega^\delta \left| \tilde{\phi}_T(X,Y) \right| \quad (2\text{-}44)$$

On établit d'abord pour J_{mp} une relation de récurrence. La relation (II-2-52) peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\phi}_T(X,Y) = \exp\left[-F_1(T)\right] \sum_{\substack{X' \subset X \\ Y' \subset Y}} K(\omega,k\ ;\ X')\ K(\omega,k\ ;\ Y')\ \tilde{\phi}_{T'+X'+Y'}(X-X',Y-Y') \tag{2-45}$$

où $X' = \omega^{\gamma'}$ $(\gamma' \leq \gamma)$, $Y' = \omega^{\delta'}$ $(\delta' \leq \delta)$ et où T' s'obtient à partir de T en enlevant (ω,k). On symétrise (2-45) comme précédemment, et on substitue le résultat dans (2-44). On pose $|\gamma'| = q'$, $|\delta'| = r'$, $\gamma'' = \gamma - \gamma'$, $\delta'' = \delta - \delta'$, $|\gamma''| = q''$, $|\delta''| = r''$. Il vient :

$$J_{mp}(T) \leq \sup_{k(\theta_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sum_{q+r=p} \sum_{\gamma(m,q)} \sum_{\delta(r)} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \sum_{\delta' \leq \delta} \int \underline{d\omega}^{\gamma'} \times$$

$$|K(\omega,k\ ;\ \omega^{\gamma'})| \int d_+\,\omega^{\delta'}\ |K(\omega,k\ ;\ \omega^{\delta'})| \int \underline{d\omega}^{\gamma''} \int d_+\,\omega^{\delta''} |\tilde{\phi}_{T'+X'+Y'}(X-X',Y-Y')| \tag{2-46}$$

où on a déjà utilisé la relation

$$\int d_\varepsilon\,\omega^{\delta} \sum_{\omega^{\delta'} \subset \omega^{\delta}} = \sum_{\delta' \leq \delta} \int d_\varepsilon \omega^{\delta'} \int d_\varepsilon\,\omega^{\delta-\delta'} \tag{2-47}$$

et la relation analogue pour $\underline{d\omega}^{\gamma}$. On regroupe maintenant les sommations en utilisant les remarques suivantes :

$$\sum_{\delta(r)} \sum_{\delta' \leq \delta} = \sum_{r'=0}^{r} \sum_{\delta'(r')} \sum_{\delta''(r-r')} \tag{2-48}$$

$$\sum_{\gamma(m,q)} \sum_{\gamma' \leq \gamma} = \sum_{q'=0}^{q} \sum_{m'=0}^{\min(m,q')} \sum_{\gamma'(m'q')} \sum_{\gamma''(m-m',q-q')} \tag{2-49}$$

$$\sum_{q+r=p} \sum_{q'=0}^{q} \sum_{r'=0}^{r} = \sum_{p'=0}^{p} \sum_{q'+r'=p'} \sum_{q''+r''=p-p'} \tag{2-50}$$

Finalement :

$$\sum_{q+r=p} \sum_{\gamma(m,q)} \sum_{\delta(r)} \sum_{\gamma' \lesssim \gamma} \sum_{\delta' \lesssim \delta} = \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} \sum_{q'+r'=p'} \sum_{q''+r''=p-p'}$$

$$\sum_{\delta'(r')} \sum_{\delta''(r'')} \sum_{\gamma'(m',q')} \sum_{\gamma''(m-m',q-q')} \tag{2-51}$$

La somme sur $\delta'', r'', \gamma'', q''$, se recombine avec la dernière intégrale pour donner un J d'ordre total inférieur à celui du premier membre. Plus précisément, on obtient :

$$J_{mp}(T) \lesssim \sup_{k(\vartheta_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} \sum_{q'+r'=p'} \sum_{\gamma'(m'q')} \sum_{\delta'(r')} \int \underline{d\omega}^{\gamma'}$$

$$|K(\omega,k\ ;\ \omega^{\gamma'})| \int d_+\ \omega^{\delta'}\ |K(\omega,k\ ;\ \omega^{\delta'})|\ J_{m-m',p-m'}\ (T'+X'+Y') \tag{2-52}$$

(2-52) est la relation de récurrence cherchée. On sépare maintenant les cas (SQ1) et (SQ2), car le premier est notablement plus simple.

Lemme (2-3) . Dans le cas (SQ1)

$$J_{mp}(T) \lesssim P(t,m,p)\ \xi^t \tag{2-53}$$

$$\text{où } P(t,m,p) = \xi^{-1}\ R^{-(p+t-1)}\ \frac{1}{m!} \left[(p+t)\ \frac{\xi\ A(\beta)}{(1-\xi)^2} \right]^m \tag{2-54}$$

avec $R = \xi \exp\left[-D(\beta)\right]$ et $A(\beta) = \beta \int \Phi(x)\ dx$.

Démonstration . On procède par récurrence sur p + t en utilisant (2-52). Le point de départ est p + t = 1. Dans ce cas, ou bien t = 1, p = m = 0, et $P(1,0,0) = \xi^{-1}$. Ou bien t = 0, p = 1, et P(0, m,1) = 0. Il est d'ailleurs immédiat qu'on peut prendre P(0,m,p) = 0 pour tout $p \geq 1$.

On substitue l'hypothèse de récurrence dans le second membre de (2-52). On rappelle que B = 0.

$$J_{mp}(T) \leq \sup_{k(\theta_k \geq 1)} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} P(t-k+p',\, m-m',\, p-p')\, \xi^{t-k+p'}$$

$$\sum_{q'+r'=p'} \sum_{\delta'(r')} \sum_{\gamma'(m',q')} \int \underline{d\omega^{\gamma'}} \mid K(\omega,k\,;\omega^{\gamma'}) \mid \int d_{+}\omega^{\delta'} \mid K(\omega,k\,;\omega^{\delta'}) \mid \tag{2-55}$$

On utilise (III-2-20) et la majoration analogue :

$$\int P_{xy}^{j}\ (d\bar{\omega})\ dx\ dy\ |K(\omega,k\,;\,\bar{\omega}j)| \leq k\ j\ \ A(\beta) \tag{2-56}$$

Les sommes sur δ' et γ' donnent respectivement les coefficients de $\xi^{r'}$ et $\xi^{q'}$ dans les développements en ξ de $\exp\left[k\ D(\beta)\right]$ et de

$$\frac{1}{m'!}\left[k\ A(\beta) \sum_{1}^{\infty} j\ \xi^{j}\right]^{m'} = \frac{1}{m'!}\left[k\ A(\beta)\ \frac{\xi}{(1-\xi)^2}\right]^{m'} \tag{2-57}$$

Par suite

$$J_{mp}\ (T) \leq \sup_{k(\theta_k \geq 1)} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} P(t-k+p',\, m-m',\, p-p')\, \xi^{t-k+p'}\ N_{p'} \tag{2-58}$$

où

$$N_{p'} = \text{coefficient de } \xi^{p'} \text{ dans } \exp\left[k\ D(\beta)\right] \frac{1}{m'!}\left[k\ A(\beta)\ \frac{\xi}{(1-\xi)^2}\right]^{m'} \qquad (2\text{-}59)$$

Une condition suffisante pour assurer le lemme est donc :

$$P(t,m,p) \geq \sup_{1\leq k\leq t} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} \xi^{-k}\ \xi^{p'}\ P(t-k+p',\ m-m',\ p-p')\ N_{p'} \qquad (2\text{-}60)$$

Ceci suggère de chercher P(t, m, p) sous la forme :

$$P(t,\ m,\ p) = P'(t+p)\ \frac{1}{m!}\left[(p+t)\ \frac{\xi\ A(\beta)}{(1-\xi)^2}\right]^{m} \qquad (2\text{-}61)$$

On obtient une condition suffisante en abandonnant dans (2-60) la condition $p' \leq p$. La somme sur p' devient alors triviale, ainsi que celle sur m', et il reste :

$$P'(t+p) \geq \sup_{1\leq k\leq t} P'(t+p-k)\ \xi^{-k}\ \exp\left[k\ D(\beta)\right] \qquad (2\text{-}62)$$

qui admet la solution $P'(t+p) = \text{constante} \times R^{-(p+t)}$. Le lemme en résulte immédiatement.

On peut maintenant établir la propriété de factorisation.

Théorème (2-1). Dans le cas (SQ1), $\bar{\chi}\ (x^m, y^m)$ est une fonction absolument intégrable des différences de ses arguments. Plus précisément :

$$J_m \equiv \int |\bar{\chi}(x^m, y^m)|\ dx^m\ dy^{m-1} \leq m!\left[\frac{A\,\xi}{(1-\xi)^2}\right]^{m-1} \frac{R}{1-\xi}$$
$$\sum_{s=m}^{\infty}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{s} s^{m-1}\ (1-\xi^{s-m+1}) \qquad (2\text{-}63)$$

La dernière série est absolument convergente pour $|z| < R$.

Démonstration. On déduit de (2-22,23,24) et de la définition de J_ε que :

$$J_m \leq m! \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma'(m-1)} (m-1)! \int P_{xy}^k (d\omega)\, dx \int \underline{d\omega}^{\gamma'} \left| \chi(\omega,k\ ;\ \omega^{\gamma'}) \right| \tag{2-64}$$

$$\leq m!\,(m-1)!\ \sum_{k=1}^{\infty} \int P_{xy}^k (d\omega)dx \sum_{\gamma'(m-1)} \int \underline{d\omega}^{\gamma'} |z|^{q'+k} \sum_{r=0}^{\infty} |z|^r \times$$

$$\sum_{\delta(r)} \int d_+\omega^{\delta} \left| D_{(\omega,k\ ;\ \omega^{\gamma'})}\ g(\omega^{\delta}) \right| \tag{2-65}$$

Mais $D_{(\omega,k\ ;\ \omega^{\gamma'})}\ g(\omega^{\delta}) = D_{(\omega,k)}\ g(\omega^{\gamma'}, \omega^{\delta}) = \tilde{\phi}_{(\omega,k)}(\omega^{\gamma'}, \omega^{\delta})$ (2-66)

d'après (II-2-45). Par suite :

$$J_m \leq m!(m-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \int P_{xy}^k (d\omega)\, dx \sum_{p=m-1}^{\infty} |z|^{p+k} \sum_{q'+r=p} \sum_{\gamma'(m-1,q')}$$

$$\sum_{\delta(r)} \int \underline{d\omega}^{\gamma'}\ d_+\omega^{\delta} \left| \tilde{\phi}_{(\omega,k)}(\omega^{\gamma'}, \omega^{\delta}) \right| \tag{2-67}$$

où on a posé $p' = q' + r$. Comparant (2-67) à (2-44), on obtient :

$$J_m \leq m!\ (m-1)!\ \sum_{k=1}^{\infty} \int P_{xy}^k (d\omega)\, dx \sum_{p'=m-1}^{\infty} |z|^{p'+k}\ J_{m-1,p'}(\omega,k) \tag{2-68}$$

On substitue dans (2-68) la majoration du lemme (2-3). On utilise de plus la relation

$$\int P_{xy}^k (d\omega)\, dx = 1 \tag{2-69}$$

On obtient

$$J_m \leq m! \left[\frac{\xi\, A(\beta)}{(1-\xi)^2} \right]^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p'=m-1}^{\infty} \xi^{k-1} |z|^{p'+k}\ R^{-(p'+k-1)}\ (p'+k)^{m-1} \tag{2-70}$$

On pose p' + k = s et on obtient immédiatement (2-63), d'où le théorème.

On passe maintenant au cas (SQ?). Soit $\Delta'(\omega,j)$ une suite de fonctions réelles strictement positives et continues d'une trajectoire de longueur $j\beta$ (j = 1, 2...).

On suppose $\Delta'(\omega,j)$ intégrable en un sens tel que les expressions définies plus loin aient un sens. On pose

$$\Delta(X) = \prod_{i=1}^{m} \Delta(\omega_i, j_i) \tag{2-71}$$

Pour toute trajectoire (ω,k) de longueur $k\beta$, on définit :

$$u_j = u_j(\omega,k) = \int P_{00}^{j} (d\bar{\omega}) \left[\frac{1}{j} v(\omega,\bar{\omega}) + k A_- e^{2j\beta B} + k A_+ \right] \Delta'(\bar{\omega},j) \tag{2-72}$$

$$v_j = v_j(\omega,k) = \int P_{0x}^{j} (d\bar{\omega})\, dx \left[v(\omega,\bar{\omega}) + j k A_- e^{2j B} + j k A_+ \right] \Delta'(\bar{\omega},j) \tag{2-73}$$

Soit réel positif. On considère le système d'inéquations :

$$\xi^k \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} (u_j(\omega,k) + v_j(\omega,k)) \right] \leq \Delta'(\omega,k) \tag{2-74}$$

où $0 < \xi < 1$. Pour $\mu = 0$, (2-74) se réduit à (III-2-30), et admet la solution (ξ,Δ) utilisée précédemment. On montre en appendice (A-2) que pour $\mu > 0$ assez petit, le système (2-74) a des solutions du même type que (III-2-30). Il existe ξ_μ $(0 < \xi_\mu \leq \xi_0)$ tel que (2-74) admette pour $0 < \xi < \xi_\mu$ une plus petite solution positive obtenue par itération à partir de zéro, et qu'on note (ξ, Δ_μ). Les $\Delta_\mu(\omega,j)$ sont continues, invariantes par translation et intégrables en un sens convenable. On montre de plus que pour tout $\xi < \xi_0$ tel que $g_\xi(x)$ définie par (III-2-40) soit intégrable (une condition suffisante pour assurer cette propriété étant $\xi < \xi_1$), on peut choisir μ assez petit pour que (2-74) ait une solution (ξ, Δ_μ) correspondant à ce ξ (ce qui revient à dire que $\xi_\mu > \xi$), et pour que la série

$$g_{\mu\xi}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} P_{0x}^{j}(d\omega)\ \Delta_{\mu}(\omega,j) \qquad (2\text{-}75)$$

converge en norme dans $L^1(R^\nu)$. On note : $\| g_{\mu\xi} \|_1 = \int g_{\mu\xi}(x)\, dx$ (2-76)

On montre maintenant le lemme suivant.

Lemme(2-4). Dans le cas (SQ2)

$$J_{mp}(T) \leq P(t, m, p)\ \Delta_{\mu}(T) \qquad (2\text{-}77)$$

où $$P(t, m, p) = \mu^{-m}\ R^{-(p+t-1)}\ \xi^{-1} \qquad (2\text{-}78)$$

avec $R = \xi \exp(-2\beta B)$, et ξ et μ satisfaisant $\xi < \xi_{\mu}$

Démonstration . On procède par récurrence sur $(p+t)$ en utilisant (2-52). Le point de départ est le même que dans le lemme (2-3). On substitue l'hypothèse de récurrence dans le second membre de (2-52). Il vient :

$$J_{mp}(T) \leq \sup_{k(\theta_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} P(t-k+p', m-m', p-p') \times$$

$$\Delta_{\mu}(T') \sum_{q'+r'=p'} \sum_{\gamma'(m',q')} \sum_{\delta'(r')} \int \frac{d\omega^{\gamma'}}{} \left| K(\omega,k\ ;\ X') \right| \Delta_{\mu}(X') \int d_{+}\omega^{\delta'} \times$$

$$\left| K(\omega,k\ ;\ Y') \right| \Delta_{\mu}(Y') \qquad (2\text{-}79)$$

$$\leq \Delta_{\mu}(T) \sup_{k(\theta_k \geq 1)} e^{2k\beta B} \sup_{\omega(k)} \Delta_{\mu}(\omega,k)^{-1} \sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} P(t-k+p', m-m', p-p')$$

$$\sum_{q'+r'=p'} \sum_{\gamma'(m',q')} \sum_{\delta'(r')} \prod_{j} \frac{1}{\gamma'_j!} \left[v_j(\omega,k) \right]^{\gamma'_j} \frac{1}{\delta'_j!} \left[u_j(\omega,k) \right]^{\delta'_j} \qquad (2\text{-}80)$$

Ceci suggère de chercher $P(t, m, p)$ sous la forme $P(t, m, p) = \mu^{-m} P'(t+p)$.

On obtient :

$$J_{mp}(T) \leq \Delta_\mu(T) \sup_k e^{2k\beta B} P'(t+p-k) \mu^{-m} \sup_{\omega(k)} \Delta_\mu^{-1}(\omega,k) \times$$

$$\sum_{p'=0}^{p} \sum_{m'=0}^{m} \sum_{q'+r'=p'} \sum_{\gamma'(m',q')} \sum_{\delta'(r')} \prod_j \frac{1}{\gamma'_j!} \left[\mu\, v_j(\omega,k)\right]^{\gamma'_j} \frac{1}{\delta'_j!} \left[\quad\right]^{\delta'_j}$$

(2-81)

On majore la somme en abandonnant les restrictions $p' \leq p$, $m' \leq m$. La somme se recombine alors facilement pour donner l'exponentielle du premier membre de (2-74). On utilise alors (2-74), et on obtient

$$J_{m,p}(T) \leq \Delta_\mu(T)\, \mu^{-m} \sup_{1 \leq k \leq t} e^{2k\beta B} \xi^{-k} P'(t+p-k) \qquad (2\text{-}82)$$

Une condition suffisante pour assurer le lemme est donc :

$$P'(t+p) \geq \sup_{1 \leq k \leq t} P'(t+p-k)\, e^{2k\beta B} \xi^{-k} \qquad (2\text{-}83)$$

qui conduit immédiatement à (2-78). Le lemme est donc démontré.

On établit enfin la propriété de factorisation.

Théorème (2-2). Dans le cas (SQ2), $\bar{\chi}(x^m, y^m)$ est une fonction absolument intégrable des différences de ses arguments. Plus précisément :

$$J_m \leq m!\,(m-1)!\, \mu^{-(m-1)} \exp(-2\beta B) (|z|/R)^{m-1} (1-|z|/R)^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|z|/R)^k \int P^k_{0x}(d\omega)\, \Delta_\mu(\omega,k)\, dx \qquad (2\text{-}84)$$

La dernière série est uniformément convergente pour $|z| < R$ et majorée par

$\| g_{\mu\xi} \|_1$

Démonstration . On substitue (2-77) dans (2-68). Il vient

$$J_m \leq m!\ (m-1)!\ \mu^{-(m-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \int P_{0x}^{k}\ (d\omega)\ dx\ \Delta_\mu(\omega,k)\ \xi^{-1} \sum_{p'=m-1}^{\infty} |z|^{p'+k}\ R^{-(p'+k-1)} \qquad (2\text{-}85)$$

Le théorème en résulte immédiatement.

Il résulte des remarques précédentes sur les solutions de (2-74) que le théorème s'applique dans toute la région $|z| < R_0 = \xi_0 \exp(-2\beta B)$, $|z| < R_1 = \xi_1\, e^{-2\beta B}$, dans laquelle on a démontré la convergence des développements de ρ en série de z, et les théorèmes de passage à la limite du volume infini. Comme on l'a déjà dit plus haut, il est très probable qu'on peut prendre $\xi_1 = \xi_0$.

VI - RELATION AVEC LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

Ce chapitre établit un lien entre les considérations de mécanique statistique des chapitres precédents et la théorie quantique des champs en montrant que les MDR du cas (SQ) permettent de définir une representation non triviale des regles de commutation ou d'anticommutation canoniques. Plus précisément, les MDR, de même que les fonctions de corrélation de la mécanique classique [24], peuvent être considérées comme les valeurs moyennes dans le vide de produits d'opérateurs de champs dans une théorie qu'on peut reconstruire à partir d'elles par la méthode de Wightman [25]. Cette construction utilise de façon essentielle des propriétés de positivité des MDR qui n'ont joué aucun rôle dans les chapitres précédents et dont l'origine est la positivité de la matrice densité du système σ. Dans la première section de ce chapitre, on établit ces propriétés : on utilise le formalisme algébrique du chapitre II pour interpréter de façon simple l'operation $A \to \hat{A}$ définie dans la section (I-3) et préciser la relation entre σ et les MDR. On obtient ainsi une première formulation des propriétes de positivité. On établit ensuite, dans le cas (SQ) qui sera seul utilisé par la suite, la relation entre ce formalisme et celui de la seconde quantification. Ce dernier fournit une deuxième méthode pour établir les propriétés de positivité. Dans la deuxième section, on construit au moyen des MDR la représentation annoncée des règles de (anti) commutation canoniques. Cette représentation admet un vide unique, mais n'est pas équivalente à la représentation de Fock.

1 - POSITIVITE DES MATRICES DENSITES REDUITES

On utilise dans cette section les notations suivantes, qui recouvrent celles de la section (I-3). $F_p = L^2(\Lambda^p)$ est l'espace des fonctions de carré sommable de p variables $x^p = (x_j)$, où $x_j \in \Lambda$ pour $1 \leq j \leq p$. F_p^ε est le sous espace des fonctions totalement ε-symétriques de F_p. Les espaces de Fock associés aux cas (SB) et (SQ) sont respectivement $F = \bigoplus_{p=0}^{\infty} F_p$ et $F^\varepsilon = \bigoplus_{p=0}^{\infty} F_p^\varepsilon$. On note respectivement δ, Δ_p et Δ les opérateurs identités dans F_1, F_p et F. On définit les opérateurs d'ε-symétrisation S_p^ε par (I-3-11), et $S = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p^\varepsilon$. On appelle Δ_p^ε et Δ^ε les projecteurs de F_p et F sur F_p^ε et F^ε. Il est clair que $S_p^\varepsilon = p!\, \Delta_p^\varepsilon$. D'autre part $\Delta^\varepsilon = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Delta_p^\varepsilon$ est l'identité dans F^ε. L'opérateur nombre de particules est défini de façon évidente par $N = \bigoplus_{p=0}^{\infty} p\, \Delta_p$. On appelle $\mathcal{F}_p$ l'espace des opérateurs bornés dans F_p, symétriques par toute permutation des particules. En particulier, ces opérateurs, commutent avec S_p^ε. On appelle $\mathcal{F}_p^\varepsilon$ l'ensemble des $A\, S_p^\varepsilon = S_p^\varepsilon\, A$ où A parcourt $\mathcal{F}_p$. On pose $\mathcal{F} = \oplus \mathcal{F}_p$ et $\mathcal{F}^\varepsilon = \oplus \mathcal{F}_p^\varepsilon$. On ne considère donc que des opérateurs qui commutent avec N. Cette restriction commode n'est pas essentielle. D'autre part, une partie des remarques qui suivent reste valable quand on remplace Λ par R^ν.

On définit un produit $*_0$ dans $\mathcal{F}$ et $*_\varepsilon$ dans $\mathcal{F}^\varepsilon$ analogues à ceux qu'on a définis dans $\overline{E}$ et $\overline{E}_\varepsilon$ au chapitre II, et se réduisant à ces derniers pour des éléments $A \in \mathcal{F}$ (ou $\mathcal{F}^\varepsilon$) dont chaque composante est représentable par un noyau intégral continu $A(x^p, y^p)$. Ceci définit dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{F}^\varepsilon$ des structures d'algèbre commutative admettant une unité commune $(1,0,0,\ldots)$ notée $\mathbb{1}$. On vérifie alors immédiatement que $\Delta = \exp \delta$, l'exponentielle étant au sens du produit $*_0$. La relation entre les structures définies dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\varepsilon$ est précisée par le lemme suivant :

Lemme (1-1). L'application $A \to A\,S^{\varepsilon} = S^{\varepsilon}A$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}^{\varepsilon}$ est un homomorphisme des structures d'algèbre associées aux produits $*_0$ et $*_{\varepsilon}$

Démonstration . Le seul point non trivial qui est de vérifier que, pour A et $B \in \mathfrak{F}$:

$$S^{\varepsilon}(A *_0 B) = (S^{\varepsilon} A) *_{\varepsilon} (S^{\varepsilon} B) \qquad (1\text{-}1)$$

résulte immédiatement des définitions (II-1-6) et (II-2-18).

En particulier : $\exp_{\varepsilon} \delta = S^{\varepsilon}\Delta = S^{\varepsilon}$

On a défini dans la section (I-3) une application $\hat{}$ de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ par

$$A = \bigoplus_p A_p \to \hat{A} = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \sum_{p \le q} \sum A_p \Delta_{q-p} \qquad (1\text{-}2)$$

où la dernière somme porte sur les C_q^p façons de partager q particules en un groupe de p et un groupe de q-p. Cette application s'interprète facilement de la façon suivante :

$$\hat{A} = A *_0 \Delta = A *_0 \exp \delta \qquad (1\text{-}3)$$

L'application $\hat{}$ est donc inversible et son inverse est défini par

$$A = \hat{A} *_0 \exp(-\delta) \qquad (1\text{-}4)$$

ou plus explicitement :

$$A_p = \sum_{q \le p} (-)^{p-q} \sum \hat{A}_q \Delta_{p-q} \qquad (1\text{-}5)$$

les notations étant les mêmes que dans (1-2). On déduit de (1-3) et du lemme (1-1) la relation suivante, qu'on utilisera plus loin :

$$S^{\varepsilon}\,\hat{A} = S^{\varepsilon}\,(A *_0 \Delta) = (S^{\varepsilon} A) *_{\varepsilon} \exp_{\varepsilon} \delta. \tag{1-6}$$

$$\text{et} \quad S^{\varepsilon} A = (S^{\varepsilon}\,\hat{A}) *_{\varepsilon} \exp_{\varepsilon} (-\delta) \tag{1-7}$$

Les remarques précédentes sont valables pour un volume fini ou infini. On suppose maintenant le volume fini. La relation (1-4) permet d'inverser la relation qui définit les MDR en fonction de σ. On note pour simplifier $\bar{\rho}_p = \bar{\rho}_\Lambda(x^p, y^p)$.

$$\bar{\rho}_p = \sum_{q \geq p} \frac{q!}{(q-p)!} \operatorname{Tr}_{q-p} \sigma_q \tag{1-8}$$

On a en effet, au moins formellement :

$$\operatorname{Tr}(\sigma\,\hat{A}) = \sum_q \operatorname{Tr}(\sigma_q\,\hat{A}_q) = \sum_p \frac{1}{p!} \operatorname{Tr}(\bar{\rho}_p\ A_p)$$

$$= \sum_p \frac{1}{p!} \sum_{q \leq p} \frac{p!(-)^{p-q}}{q!(q-p)!} \operatorname{Tr}(\bar{\rho}_p\ (\hat{A}_q\ \Delta_{p-q})) \tag{1-9}$$

D'où en identifiant

$$\sigma_q = \sum_{p \geq q} (-)^{p-q} \frac{1}{q!(p-q)!} \operatorname{Tr}_{p-q} \bar{\rho}_p \tag{1-10}$$

On montre maintenant que cette expression a un sens dans certains cas. On suppose donnée

$$\sigma_q = \frac{1}{Z}\ z^q\ \sigma'_q \tag{1-11}$$

où σ'_q est un opérateur borné auto-adjoint positif de trace finie, et où Z est définie par la série à termes positifs

$$Z = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \ \mathrm{Tr}\ \sigma'_q \qquad (1\text{-}12)$$

On suppose que cette série a un rayon de convergence $r > 0$. Comparant (1-8) avec (1-12), on obtient, pour tout z complexe tel que $|z| < r$ et $Z(z) \neq 0$

$$|\mathrm{Tr}\ \bar{\rho}_p| = \frac{1}{Z} \sum_{q \geq p} \frac{q!}{(q-p)!} z^q \ \mathrm{Tr}\ \sigma'_q \qquad (1\text{-}13)$$

$$|\mathrm{Tr}\ \bar{\rho}_p| \leq \frac{1}{|Z(z)|} |z|^p \ Z^p\ (|z|) \qquad (1\text{-}14)$$

où $Z^p(z)$ est la dérivée $p^{\text{ième}}$ de Z par rapport à z. La série (1-13) est absolument convergente pour $|z| < r$, et majorée par (1-14). La convergence de (1-13) entraîne que (1-8) converge en norme dans $\mathcal{F}_p$, comme on l'a déjà vu dans la section (I-3).

On considère maintenant (1-10). La série donnant $\mathrm{Tr}\ \sigma_p$ est majorée absolument terme à terme par la série suivante :

$$|\mathrm{Tr}\ \sigma_p| \leq \sum_{q \geq p} \frac{1}{p!(q-p)!} \frac{1}{|Z(z)|} |z|^q \ Z^q\ (|z|) \qquad (1\text{-}15)$$

$$\leq \frac{1}{|Z(z)|} \frac{1}{p!} \sum_{q \geq p} \frac{q!}{(q-p)!} \frac{|z|^q}{q!} Z^q\ (|z|) \qquad (1\text{-}16)$$

$$|\mathrm{Tr}\ \sigma_p| \leq \frac{1}{|Z(z)|} \frac{|z|^p}{p!} Z^p\ (2\ |z|) \qquad (1\text{-}17)$$

La série (1-10) converge donc absolument en trace pour $|z| < r/2$. Il en résulte qu'elle converge en norme dans $\mathcal{F}_p$ dans la même région.

Enfin, la série obtenue en substituant dans $\mathrm{Tr}\sigma = \sum \mathrm{Tr}\sigma_q$ la série (1-10) est majorée absolument terme à terme par la série

$$|\mathrm{Tr}\ \sigma| \leq \frac{1}{|Z(z)|} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|z|^p}{p!} Z^p\ (2|z|) = \frac{1}{|Z(z)|} Z\ (3|z|) \qquad (1\text{-}18)$$

et converge donc pour $|z| < r/3$, résultat de peu d'intérêt puisque $\mathrm{Tr}\ \sigma = 1$.

Dans le cas d'un gaz, en équilibre thermodynamique, de particules interagissant par un potentiel Φ satisfaisant les conditions (A), (B) ou (B'), et (D) de la section (I-1), il est naturel de prendre pour z l'activité du système et pour Z sa fonction de partition. On obtient :

Dans le cas (SB) :

$$\sigma'_q = \frac{1}{q!} \exp(-\beta H_q) \tag{1-19}$$

avec $\|e^{-\beta H_q}\| \leq \exp(q\beta B)$ et $\mathrm{Tr} \exp\left[-\beta H_q\right] \leq \left(\frac{V}{\lambda^\nu} e^{\beta B}\right)^q$ (1-20)

Le rayon de convergence r est infini, donc la série (1-10) converge, pour toute valeur de z telle que $Z(z) \neq 0$ et toute valeur de V, en norme et en trace :

$$\| \sigma_q \| \leq \frac{1}{|Z(z)|} |z|^q \; e^{q\beta B} \; \exp\left\{ \frac{V}{\lambda^\nu} 2|z| \, e^{\beta B} \right\} \tag{1-21}$$

$$|\mathrm{Tr}\, \sigma_q| \leq \frac{1}{|Z(z)|} \left(\frac{V}{\lambda^\nu} |z| \, e^{\beta B} \right)^q \; \exp\left\{ \frac{V}{\lambda^\nu} 2|z| \, e^{\beta B} \right\} \tag{1-22}$$

Dans les cas (SQ) :

$$\sigma'_q = \frac{1}{q!} S_q^\varepsilon \exp(-\beta H_q) \tag{1-23}$$

D'après (I-3-52), on peut prendre $r = \exp(-\beta B)$. La série (1-10) converge donc absolument en trace (et par suite en norme dans $\mathcal{J}_q$) pour $|z| \leq \frac{1}{2} e^{-\beta B}$ et satisfait la majoration (1-17), dans laquelle on peut substituer la majoration (I-3-52) de Z.

Les majorations ainsi obtenues sur σ sont évidemment très mauvaises. En effet, la série (1-10) est dans les cas physiques, une série alternée d'opérateurs positifs, et on peut s'attendre à des compensations importantes entre

les termes. Cette propriété disparaît quand on cherche des majorations absolues terme à terme. A titre d'exemple, on peut comparer (1-21) et (1-22) aux majorations directes déduites de (1-19), (1-20).

On s'intéresse maintenant aux propriétés des $\bar{\rho}_p$ qui résultent de la positivité de σ. L'expression la plus naturelle de celles-ci est la suivante : pour tout vecteur $g \in F_q$, $< g \mid \sigma_q \mid g > \geq 0$, ou :

$$\int \bar{g}\,(x^q)\; g(y^q)\;\; \sigma_q(x^q, y^q)\; dx^q\, dy^q \geq 0 \qquad (1\text{-}24)$$

Substituant (1-10) dans (1-24), on obtient la condition suivante pour $\bar{\rho}_\Lambda$:

$$\sum_{p \geq q} \frac{(-)^{p-q}}{q!(p-q)!} \int \bar{g}\,(x^q)\; g(y^q)\;\; \bar{\rho}_\Lambda\,(x^q, u^{p-q}\,;\, y^q, u^{p-q})\; dx^q\, dy^q\, du^{p-q} \geq 0 \qquad (1\text{-}25)$$

Cette formulation présente deux inconvénients : d'une part, elle suppose la convergence de (1-10), qui peut n'avoir pas lieu dans des conditions assez générales. D'autre part, elle est impropre au passage à la limite du volume infini. Dans cette limite, chaque terme de la série (1-25) devient infini, en raison de la trace partielle sur $\bar{\rho}_p$.

On peut exprimer la positivité de σ sous une forme équivalente à la précédente par la condition suivante (P) :

(P) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ (ou pour tout $\hat{A} \in \mathcal{F}$), tel que la série

$$\mathrm{Tr}\;(\hat{A}^+\, \sigma\, \hat{A}) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\hat{A}_q^+\, \sigma_q\, \hat{A}_q) \qquad (1\text{-}26)$$

soit convergente, on a $\mathrm{Tr}(\hat{A}^+\, \sigma\, \hat{A}) \geq 0$ (1-27)

(P) est une généralisation de (1-25), qui correspondait au cas où $\hat{A}$ se réduisait au projecteur sur le vecteur $g \in F_q$. On obtiendra des conditions nécessaires de positivité de σ en restreignant la classe des A considérés dans la

condition (P). On introduit la notation suivante : on dira que $A \in \mathcal{F}$ est d'ordre fini si tous les A_p sont nuls à partir d'un certain rang, et on appellera ordre d'un tel A l'entier m tel que $A_m \neq 0$, $A_p = 0$ pour $p > m$. Si $A \in \mathcal{F}$ est d'ordre fini m, alors A est borné et $\|A\| = \underset{p \leq m}{\text{Max}} \| A_p \|$.

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme (1-2) . Soit A, $B \in \mathcal{F}$ et C défini par $\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B}$. Alors

$$C_p(X,Y) = \sum_{S,U,V} \int A_m(S+U,\ T+U')\ B_n(T+V,\ S'+V')\ dT \qquad (1\text{-}27)$$

où $X = x^p$, $Y = y^p$. C_p, A_m et B_n sont les composantes de C, A et B à p, m et n particules respectivement. La somme porte sur toutes les partitions de X en trois sous familles S,U,V ; S',U' et V' sont les sous familles correspondantes de Y. Le lemme est écrit en supposant pour simplifier que les composantes de A et B sont représentables par des noyaux intégraux.

Démonstration . On tire de la définition de C

$$\hat{C}_p(X,Y) = (A *_0 \Delta)\ (B *_0 \Delta)\ (X,Y) \qquad (1\text{-}28)$$

$$= \sum_{M \subset X} \sum_{N' \subset Y} \int d\,X''\ A_m(M,M')\ \Delta_{p-m}(X-M, X''-M'') \times$$

$$B_n(N'',N')\ \Delta_{p-n}(X''-N'', X'-N')\ d\,X'' \qquad (1\text{-}29)$$

On pose $\begin{cases} M'' \cap N'' = S'' \quad M'' \cap (X'' - N'') = U'',\ (X'' - M'') \cap N'' = V'' \\ (X'' - M'') \cap (X'' - N'') = T'' \end{cases}$ (1-30)

On obtient

$$\hat{C}_p(X,Y) = \sum_{S'' \subset X''} \sum_{U'' \subset X''-S''} \sum_{V'' \subset (X''-S''-U''} \int dX'' \, A_m(S+U,\, S''+U'') \quad \times$$

$$\Delta_{p-m}(V+T,\, V''+T'')\, B_n(S''+V'',\, S'+V')\, \Delta_{p-n}(U''+T'',\, U'+T') \tag{1-31}$$

$$= \sum \ldots \sum \int dS'' \, A_m(S+U,\, S''+U')\, B_n(S''+V,\, S'+V')\, \Delta_t(T,T') \tag{1-32}$$

où t est le nombre de variables dans T et où la somme porte sur toutes les partitions de X en S,U,V,T et les partitions correspondantes de Y. On reconnait dans (1-32) la composante p de $C *_0 \Delta$ avec C donné par (1-27). Le lemme est donc démontré.

Il résulte du lemme (1-2) que si A est d'ordre fini m, alors C défini par

$$\hat{C} = \hat{A}\ \hat{A}^+ \tag{1-33}$$

est d'ordre fini $\leq 2m$.

On revient à la condition (P). On obtient une condition nécessaire en se restreignant aux opérateurs A d'ordre fini. On supose en outre que σ est donnée par (1-11), (1-12). Alors la série (1-26) est absolument convergente pour tout $|z| < r$.

En effet

$$\| \hat{C}_q \| \leq \| C \| \sum_{p \leq q} C_q^p \tag{1-34}$$

Donc

$$\mathrm{Tr}(\sigma \hat{C}) \leq \| C \|_p \sum_{q \geq p} C_q^p \ \mathrm{Tr}\ \sigma_q \tag{1-35}$$

La somme sur p est en fait finie : $p \leq 2m$, où m est l'ordre de A. Il suffit de considérer chaque terme séparément. Mais

$$\sum_{q \geq p} C_q^p \quad \mathrm{Tr}\ \sigma_q = \frac{1}{Z(z)} \frac{z^p}{p!} Z^p(z) \qquad (1\text{-}36)$$

La série converge donc absolument pour $|z| < r$. On en déduit facilement que

$$\mathrm{Tr}\ (\sigma \hat{C}) = \sum_p \frac{1}{p!} \mathrm{Tr}\ (\bar{\rho}_p C_p) \qquad (1\text{-}37)$$

En écrivant que cette quantité est positive pour tout $A \in \mathcal{F}$, A d'ordre fini, on obtient la condition de positivité suivante :

$$\sum_{\substack{p,m,n \\ s,u,v}} \frac{1}{s!u!v!} \int dT\ dX\ dY\ A_m(S+U, T+U')\ \bar{A}_n(S'+V', T+V)\ \bar{\rho}_\Lambda(Y,X) \geq 0 \qquad (1\text{-}38)$$

où s,u, et v sont les nombres de variables dans S,S' et T, dans U,U' et dans V, V' respectivement, et où $X = S + U + V$, $Y = S' + U' + V'$.

La forme (1-38) de la condition de positivité appelle deux remarques :

(R1) Aucune hypothèse n'a été faite sur la statistique des particules, c'est-à-dire sur les propriétés de symétrie de $\bar{\rho}_\Lambda(X,Y)$ par rapport à X et à Y séparément. En particulier, la méthode s'applique au cas (SB), contrairement à celle qui utilise la seconde quantification, et qu'on verra plus loin.

(R2) On peut se demander si (1-38) est une condition équivalente à (P). Il suffit pour cela que la propriété (P) restreinte aux A d'ordre fini entraîne la propriété (P) (apparemment) restreinte aux $\hat{A}$ d'ordre fini, c'est-à-dire aux $\hat{C}$ d'ordre fini. Des majorations élémentaires montrent qu'il en est bien ainsi pour $|z| < r/2$, condition qui assure la convergence de la série (1-10) qui définit σ en fonction de $\bar{\rho}_\Lambda$. Il est beaucoup moins évident qu'on puisse exprimer au moyen de $\bar{\rho}_\Lambda$ une condition suffisante de positivité de σ lorsque cette série ne converge pas.

Les considérations précédentes s'appliquaient au cas où le volume du système était fini. On utilise maintenant les théorèmes limites du chapitre IV pour obtenir une condition de positivité sur la famille $\bar{\rho}$ des MDR à volume infini. Il résulte du théorème (IV-1) que $\bar{\rho}$ satisfait la condition (1-38) pour tout opérateur $A \in \mathcal{F}$, d'ordre fini, et dont chaque composante est représentable par un noyau intégral $A(x^p, y^p)$ qui est une fonction continue à support compact de (x^p, y^p).

On se limite désormais au cas (SQ) et on utilise le formalisme de la seconde quantification pour étudier les propriétés de positivité des MDR. Soit $f \in L^2(\Lambda)$. On définit les opérateurs de champ $a(f)$ et $a^+(f)$ comme suit : si $\phi \in F^\varepsilon_p$, alors $a(f)\,\phi \in F^\varepsilon_{p-1}$ et $a^+(f)\phi \in F^\varepsilon_{p+1}$ sont définis par :

$$\left[a(f)\ \phi\right](x_1,\ldots,x_{p-1}) = \sqrt{p} \int f(x)\ \phi\ (x,x_1,\ldots x_{p-1})\ dx \qquad (1\text{-}39)$$

$$\left[a^+(f)\phi\right](x_1,\ldots x_{p+1}) = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \sum_{j=1}^{p+1} \varepsilon^j\ f(x_j)\ \phi(x_1,\ldots\hat{x}_j,\ldots x_{p+1}) \qquad (1\text{-}40)$$

où $\hat{x}_j$ signifie que cette variable doit être omise.

Il est clair que $a(f) \in \mathcal{F}^\varepsilon$, $a^+(f) \in \mathcal{F}^\varepsilon$ et que ces opérateurs satisfont les relations

$$\left[a(\bar{f}),\ a(g)\right]_\varepsilon = \left[a^+(\bar{f}),\ a^+(g)\right]_\varepsilon = 0 \qquad (1\text{-}41)$$
$$\left[a(\bar{f}),\ a^+(g)\right]_\varepsilon = \langle f, g \rangle = \int \bar{f}(x)\ g(x)\ dx$$

où $\left[\ ,\ \right]_\varepsilon$ est le commutateur pour $\varepsilon = +1$ et l'anticommutateur pour $\varepsilon = -1$

On définit formellement $a(x)$ et $a^+(x)$ par

$$a^{(+)}(f) = \int a^{(+)}(x)\ f(x)\ dx \qquad (1\text{-}42)$$

On pose $x^m = (x_1,\ldots x_m)$ et $\underline{x}^m = (x_m,\ldots,x_1)$ (1-43)

$$\begin{cases} a^{(+)}(x^m) = a^{(+)}(x_1)\ldots a^{(+)}(x_m) \\ a^{(+)}(\underline{x}^m) = a^{(+)}(x_m)\ldots a^{(+)}(x_1) \end{cases} \tag{1-44}$$

Pour toute fonction $b \in L^2(\Lambda^{m+n})$, on définit l'opérateur

$$B = \int b(x^m, y^n)\, a^+(x^m)\, a(\underline{y}^n)\, dx^m\, dy^n \tag{1-45}$$

B envoie chaque F_q^ε dans F_{q-n+m}^ε. Si $\phi \in F_q^\varepsilon$, alors

$$\left[B\ \phi\right](x^m, y^{q-n}) = \left[q!/(q-n+m)!\right]^{1/2} \mathcal{S} \int b(x^m, \xi^n)\, \phi\,(\xi^n, y^{q-n})\, d\xi^n \tag{1-46}$$

où $\mathcal{S}$ est la symétrisation venant des facteurs ε qui figurent dans $a^+(x^m)$ (1-40) et se réduit à $\left[(q-n)!\right]^{-1}\ S^\varepsilon_{q-n+m}$, où S^ε_{q-n+m} est défini par (I-3-11), et opère ici sur les variables (x^m, y^{q-n}). La relation entre la seconde quantification et le formalisme précédent est mise en évidence dans le lemme suivant :

<u>Lemme (1-3)</u> . Soit $B = \int b(x^m, y^m)\, a^+(x^m)\, a(\underline{y}^m)\, dx^m\, dy^m$ (1-47)
où $b(x^m, y^m) \in L(\Lambda^{2m})$ est une fonction symétrique des m couples (x_i, y_i) et définit donc un opérateur $b \in \mathcal{F}_m$. Alors

$$B = \Delta_\varepsilon\, \hat{A} \tag{1-48}$$

où $A \in \mathcal{F}^\varepsilon$ est défini par

$$\begin{cases} A_p = 0 \qquad (p \neq m) \\ A_m = S^\varepsilon_m\ b \end{cases} \tag{1-49}$$

<u>Démonstration</u>. (1-46) entraîne

$$(B\ \phi)\ (x^m, y^{q-m}) = \frac{1}{(q-m)!}\ S^\varepsilon_q \int b(x^m, \xi^m)\ \phi(\xi^m, y^{q-m})\, d\xi^m \tag{1-50}$$

donc $$B_q = \frac{1}{(q-m)!} \; S_q^{\varepsilon} \, (b \; \Delta_{q-m}) \; \Delta_q^{\varepsilon} = \Delta_q^{\varepsilon} \, (A * \Delta)_q \qquad (1\text{-}51)$$

où A est défini par (1-49).

La définition (I-3- 8) des MDR s'exprime en seconde quantification par :

$$\frac{1}{m!} \; \mathrm{Tr}(\bar{\rho}_m \, A_m) = \mathrm{Tr} \; (\sigma \, \hat{A}) = \int b(x^m, y^m) \; \mathrm{Tr} \; \sigma \; a^+(x^m) \; a(\underline{y}^m) \; dx^m \; dy^m \qquad (1\text{-}52)$$

où A et b sont reliés par (1-49). (1-52) donne immédiatement la définition usuelle [17]

$$\bar{\rho}_\Lambda \; (x^m, y^m) = \mathrm{Tr} \; (\sigma \; a^+(y^m) \; a(\underline{x}^m)) \qquad (1\text{-}53)$$

On utilise maintenant le formalisme précédent pour exprimer la positivité de σ en termes des $\bar{\rho}_\Lambda$. On présente seulement la partie algébrique de la démonstration.

L'existence des différentes quantités qui interviennent peut être prouvée comme précédemment. On écrit que $\mathrm{Tr}(B^+ \; \sigma \; B) \geq 0$ pour tout opérateur du type suivant :

$$B = \sum_{m,n} \int b(x^m, y^n) \; a^+(x^m) \; a(\underline{y}^n) \; dx^m \; dy^n \qquad (1\text{-}54)$$

où tous les $b_{mn} = b(x^m, y^n)$ sont nuls sauf un nombre fini, et où on suppose, sans restreindre la généralité, que $b(x^m, y^n)$ est totalement ε -symétrique par rapport à x^m et à y^n séparément. Il vient :

$$\mathrm{Tr} \; (B^+ \; \sigma \; B) = \sum_{m,n,m',n'} \int dx^m \; dx'^{m'} \; dy^n \; dy'^{n'} \; b(x^m, y^n) \; \bar{b} \; (x'^{m'}, y'^{n'})$$

$$\mathrm{Tr} \left\{ a^+(y'^{n'}) \; a(\underline{x}'^{m'}) \sigma \; a^+(x^m) \; a(\underline{y}^n) \right\} \qquad (1\text{-}55)$$

On pose $Y = y^n$, $Y' = y'^{n'}$, $X = x^m$, $X' = x'^{m'}$ (1-56)

$$K(Y,Y') = a(\underline{Y})\ a^+(Y') \tag{1-57}$$

$$L(Y,Y') = a^+(Y')\ a(\underline{Y}) \tag{1-58}$$

Le théorème de Wick permet d'écrire :

$$K(Y,Y') = \sum_{S \subset Y} \sum_{S' \subset Y'} \varepsilon^{\pi}\ \varepsilon^{(n-s)(n'-s')}\ \Delta_{\varepsilon}(S,S')\ L(Y-S\ ,\ Y'-S') \tag{1-59}$$

où π est le produit des permutations qui transforment Y en (S, Y-S) et Y' en (S', Y'-S'). On substitue (1-59) dans (1-55). On pose Y-S = T, Y'-S' = T', et on effectue l'intégration triviale sur S'. On regroupe les différents facteurs et on obtient :

$$\mathrm{Tr}\ (B^+ \sigma\ B) = \sum_{m,m',t,t',s} \frac{\varepsilon^{tt'}}{s!t!t'!} \int dX\ dX'\ dT\ dT'\ dS \quad \times$$

$$b(X,S+T)\ \overline{b}\ (X',S+T')\ \ \overline{\rho}_{\Lambda}(X'+T,\ X+T') \geq 0 \tag{1-60}$$

où s,t,t' sont les nombres de variables dans S,T,T' respectivement. On vérifie facilement que si dans (1-60) on se restreint aux B qui commutent avec le nombre de particules, et si dans (1-38) on se restreint aux A, $\overline{\rho}_{\Lambda}$ de symétrie convenable, on obtient le même résultat.

Comme précédemment, la condition (1-60) garde un sens à la limite du volume infini pour des b continus à support compact. C'est avec ces hypothèses et sous la forme (1-60) qu'on utilisera la positivité de $\overline{\rho}$ dans la section suivante.

2 - CONSTRUCTION D'UN MODELE DE THEORIE DES CHAMPS

On a obtenu dans les chapitres précédents une famille $\bar{\rho}$ de fonctions de 2 m variables $\bar{\rho} = (\bar{\rho}(x^m, y^m))$ qui sont les MDR du cas (SQ) pour un volume infini et une activité z réelle positive, et qui possèdent les propriétés suivantes.

α) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est une fonction continue (sauf sur certains ensembles de mesure nulle) et bornée.

β) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est invariante par toute translation a de tous ses arguments. On suppose de plus le potentiel Φ à symétrie sphérique. $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est alors invariante par toute transformation (a,R) du groupe euclidien à ν dimensions $\mathcal{G}$. (Si Φ n'est pas à symétrie sphérique, tout ce qui suit reste valable en remplaçant $\mathcal{G}$ par le groupe des translations).

γ) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est réelle.

δ) $\bar{\rho}(x^m, y^m)$ est totalement ε symétrique par rapport aux x^m et aux y^m séparément.

ε) $\bar{\rho}$ satisfait une propriété de factorisation sous la forme des théorèmes (V-2-1,2).

φ) $\bar{\rho}$ satisfait la condition de positivité (1-60) pour toute famille finie $B = (b_{mn})$ de fonctions continues à support compact (possédant les propriétés d'ε symétrie convenable).

On déduit de ces propriétés le résultat suivant

Théorème (2-1) . Il existe un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, une représentation unitaire continue dans $\mathcal{H}$ du groupe $\mathcal{G}$: $(a,R) \to U(a,R)$, un vecteur $F_0 \in \mathcal{H}$ unique invariant par tous les U(a,R), et deux champs A(x) et $A^+(x)$ définis ainsi que tous leurs polynômes dans un domaine $\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{H}$ (c'est-à-dire deux applications $f \to A^{(+)}(f) = \int A^{(+)}(x)\, f(x)\, dx$ de l'espace des

fonctions continues à support compact d'une variable $x \in R^{\nu}$ dans l'espace des opérateurs (en général non bornés) dans $\mathcal{H}$, telles que pour toute telle f, le domaine de $A^{(+)}(f)$ contienne $\mathcal{D}$), et possédant les propriétés suivantes :

(1) A et A^{+} se transforment de façon convenable par U(a,R)

$$U(a,R)\ A^{(+)}(x)\ U(a,R)^{-1} = A^{(+)}\ (R^{-1}(x-a)) \qquad (2\text{-}1)$$

(2) Pour toute f continue à support compact et tout $F \in \mathcal{D}$, $G \in \mathcal{D}$, on a

$$< F\ ,\ A(f)\ G > = <A^{+}(\overline{f})\ F,\ G > \qquad (2\text{-}2)$$

(3) A et A^{+} obéissent aux règles d'ε-commutation canoniques (1 - 41)

(4) Les valeurs moyennes dans le vide F_0 des produits d'opérateurs de champ sont données par $\overline{\rho}$ de la façon suivante :

$$< F_0 |\ A^{+}(y^m)\ \ A(\underline{x}^m)\ |\ F_0 > = \overline{\rho}\ (x^m, y^m) \qquad (2\text{-}3)$$

$$< F_0 |\ A^{+}(y^m)\ \ A(\underline{x}^p)\ |\ F_0 > = 0 \quad (p \neq m) \qquad (2\text{-}4)$$

Les valeurs moyennes d'un produit quelconque de A et A^{+} se déduisent de (2-3), (2-4) en utilisant les relations de commutation.

Démonstration . La démonstration est la même qu'en théorie quantique des champs [25,26]. On en présente seulement l'ossature et les propriétés particulières du cas présent. On appelle H l'espace des suites finies $F = (F(x^m, y^n)$; m,n = 0,1...) de fonctions complexes continues à support compact de m+n variables appartenant à R^{ν}, totalement ε-symétriques par rapport à x^m et à y^n séparément. On définit dans H un produit scalaire par :

$$< F , G > = \sum_{m,m',t,t',s} \frac{\varepsilon^{tt'}}{m!m'!t!t'!s!} \int dX\, dX'\, dS\, dT\, dT'\ \overline{F}\,(S+T,X) \quad \times$$

$$C(S+T',X')\ \overline{\rho}(X'+T,\ X+T') \qquad (2\text{-}5)$$

où X, X', T, T' et S sont des familles de m, m', t, t' et s points de R^{ν} respectivement. $< F,G >$ est linéaire par rapport à G, antilinéaire par rapport à F. Il résulte de la propriété (ϕ) que $< F,F > \geq 0$ pour tout F. On pose $\| F \| = < F,F >^{1/2}$.

Intuitivement, la composante m,n de F devra représenter le vecteur

$$\int dx^m\, dy^n\ F(x^m,y^n)\ A^+(x^m)\ A(\underline{y}^n)\ |\ F_0 > \qquad (2\text{-}6)$$

et la définition (2-5) est choisie de façon telle que $< F,G >$ s'obtienne en substituant (2-3) dans l'expression obtenue à partir de (2-6) et de l'analogue pour G.

On définit de façon évidente une représentation $U(a,R)$ de $\mathcal{G}$, qui est trivialement isométrique. On voit facilement qu'elle est fortement continue. Il existe un vecteur de H et un seul $F_0 = (1,0,0\ldots)$ invariant par les transformations $U(a,R)$. Il résulte de $\overline{\rho}_0 = 1$ que $\| F_0 \| = 1$.

Pour toute f continue à support compact, on définit deux opérateurs $A(f)$ et $A^+(f)$ de la façon suivante : soit $F \in H$

$$(A(f)\ F)\ (x^m,y^n) = (m+1) \int f(x)\ F(x,x^m\ ;\ y^n)\ dx$$

$$+ \frac{1}{n}\ \varepsilon^m \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^{j-n}\ f(y_j)\ F(x^m\ ;\ y_1,\ldots\hat{y}_j,\ldots,y_n) \qquad (2\text{-}7)$$

$$(A^+(f)\ F)\ (x^m,y^n) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon^{j-1}\ f(x_j)\ F(x_1,\ldots\hat{x}_j;\ldots x_m\ ;\ y^n) \qquad (2\text{-}8)$$

où $\hat{}$ signifie variable omise.

L'origine de ces définitions est intuitive quand on tient compte de l'interprétation (2-6).

Un calcul élémentaire montre alors que A et A^+ satisfont (2-2) pour tout $F \in H$, $G \in H$, et que A et A^+ obéissent aux règles d'ε -commutation canoniques (1-41).

Soit H_0 le sous espace de H formé des vecteurs $F \in H$ pour lesquels $\| F \| = 0$

H_0 est invariant par U(a,R), car ces opérateurs sont isométriques, H_0 est également invariant par les A(f), $A^+(f)$. En effet

$$\| A(f)\ F\ \|^2 = < A(f)\ F,\ A(f)\ F > = < F\ ,\ A^+(\bar{f})\ A(f)\ F\ >$$

$$\leq \| F \| \| A^+(\bar{f})\ A(f)\ F \| \qquad (2\text{-}9)$$

donc $\| A(f)\ F \| = 0$ si $\| F \| = 0$. Le même résultat vaut pour $A^+(f)$.

On considère maintenant le quotient H/H_0. Toutes les opérations définies précédemment passent au quotient sans difficulté. H/H_0 est un espace préhilbertien. On le complète de façon classique, et on obtient un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On montre facilement que $\mathcal{H}$ est séparable. On garde pour simplifier les mêmes notations pour les vecteurs et opérateurs dans $\mathcal{H}$ que dans H. La représentation de $\mathcal{G}$ s'étend en une représentation unitaire dans $\mathcal{H}$. Les opérateurs de champ ainsi que tous leurs polynômes sont définis dans $\mathcal{D} = H/H_0$ qui est un sous espace dense de $\mathcal{H}$.

On montre maintenant que le vide est unique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas dans $\mathcal{H}$ d'autre vecteur invariant par tous les U(a,R) que F_0. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe un autre vecteur ψ invariant. Il est clair que $\psi \notin \mathcal{D}$. On peut sans restreindre la généralité supposer que ψ est de norme 1 et orthogonal à F_0. ψ peut être approché à η près par $F \in \mathcal{D}$, qu'on peut également supposer de norme 1. $\| \psi \| = \| F \| = 1$, $\| F - \psi \| \leq \eta$ et par suite $| < F, F_0 > | \leq \eta$

Soit Λ un ouvert borné, par exemple une sphère de rayon L, de volume V. Il résulte de l'invariance de ψ que

$$< \psi , \psi > = \frac{1}{V} \int_{\Lambda} da < \psi , U(a,1) \psi > \qquad (2\text{-}10)$$

$$\leq | < \psi - F , \psi > | + | < \psi , \psi - F > | + \frac{1}{V} \int da \, | < F , U(a,1) F > | \qquad (2\text{-}11)$$

$$\leq 2\eta + \frac{1}{V} \left| \int da < F , U(a,1) F > \right| \qquad (2\text{-}12)$$

On substitue dans le dernier terme la définition du produit scalaire et on sépare la somme qui figure dans celle-ci en trois termes.

-un terme correspondant à s = 0 et au remplacement de $\overline{\rho}(X'+T, X+T')$ par $\varepsilon^{tt'} \overline{\rho}(X',T') \overline{\rho}(T,X)$. Ce terme donne $| < F, F_0 > |^2 \leq \eta^2$.

- un terme qui complète la contribution de s = 0.

- la contribution de $s \neq 0$. Finalement

$$< \psi , \psi > \leq 2\eta + \eta^2 + \frac{1}{V} \sum_{m,m',t,t'} \frac{1}{t!t'!} \left| \int da \, dX \, dX' \, dT \, dT' \right.$$

$$\left. \overline{F}(T,X) F(T',X') \left[\varepsilon^{tt'} \overline{\rho}(X'_a + T, X + T'_a) - \overline{\rho}(X', T') \overline{\rho}(T,X) \right] \right|$$

$$+ \frac{1}{V} \left| \sum_{s \neq 0, m, m', t, t'} \frac{\varepsilon^{tt'}}{s!t!t'!} \int da \, dX \, dX' \, dT \, dT' \, dS \, \overline{F}(S + T, X) \times \right.$$

$$\left. F(S_{-a}+T', X') \overline{\rho}(X'_a + T, X + T'_a) \right| \qquad (2\text{-}13)$$

où X_a est la famille des translatés par a des points de X, et où on a utilisé à plusieurs reprises l'invariance de $\overline{\rho}$ par translation. On considère l'intégrale qui figure dans l'avant dernier terme de (2-13). Le dernier facteur peut être décomposé en somme de produits de composantes de $\overline{\chi}$, et dans chaque terme, la translation a apparaitra au moins une fois dans les différences

d'arguments d'un même facteur. Il résulte alors de la propriété de factorisation (ε) et du fait que le support de F est compact que l'intégrale correspondante reste finie quand on étend l'intégration sur a à tout l'espace.

On considere enfin le dernier terme de (2-13). F étant à support compact, il résulte de la présence de a dans l'un des facteurs F et non dans l'autre que l'intégration ne porte en fait que sur un domaine borné indépendamment de Λ. Par suite, la dernière intégrale reste finie quand Λ devient infini.

Par suite

$$< \psi \mid \psi > \leq 2\eta + \eta^2 + \frac{1}{V} M$$

où M ne dépend pas de V. Cette quantité peut être rendue arbitrairement petite en choisissant successivement η et V, ce qui contredit l'hypothèse $\| \psi \| = 1$. Le vide est donc unique, ce qui acheve la démonstration du théorème.

On montre aisément [25] que toute théorie satisfaisant les propriétés du théorème (2-1) est unitairement équivalente à celle qu'on vient de construire.

D'autre part, il résulte de la propriété (4) du théorème (2-1) que la représentation des règles d'ε -commutation canoniques qu'on vient de construire n'est pas équivalente à la représentation de Fock.

Dans le cas des systèmes sans interaction, des résultats analogues à ceux qui précèdent, mais plus précis, ont été obtenus par une méthode différente [27,28].

CONCLUSION

Les principaux résultats de cette étude sont les suivants. On a considéré un système de particules identiques satisfaisant les lois de la mécanique quantique et obéissant soit à la statistique de Boltzmann (cas (SB)), soit à la statistique de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac (cas(SQ)). Ces particules interagissent par un potentiel à deux corps ϕ qui satisfait un certain nombre desconditions de la section (I-1), et plus précisément (A)(B)(C)(D) dans le cas (SB1), c'est-à-dire (SB) sans coeur dur, (A)(B')(C)(D) dans le cas (SB2), c'est-à-dire (SB) avec coeur dur, (A)(B)(C)(E) dans le cas (SQ1), c'est-à-dire (SQ) sans coeur dur, et (A)(B')(C)(F) dans le cas (SQ2), c'est-à-dire (SQ) avec coeur dur. Sous ces hypothèses :

1) Pour un volume fini V, la fonction de partition et les matrices densités réduites du système, décrit dans le formalisme grand canonique, sont bien définies et sont des fonctions analytiques de l'activité dans un voisinage $|z| < R$ de l'origine $z = o$, où R est donné respectivement par (III-1-28), (III-1-52), (III-2-23) et (III-2-32) dans les cas (SB1), (SB2), (SQ1) et (SQ2). Ce voisinage est indépendant du volume V du système. Les MDR sont des opérateurs bornés dans l'espace des fonctions d'ondes des nombres de particules convenables.

2) Quand le volume V de la région Λ où est enfermé le système devient infini, Λ gardant une forme raisonnable (plus précisément, pour toute région bornée W, on impose que $W \subset \Lambda$ pour V assez grand, et que la distance de W à la frontière de Λ augmente indéfiniment avec V),

les MDR tendent vers des limites bien définies. Ces limites sont également analytiques en z pour $|z| < R$ et sont des opérateurs bornés. La convergence est comprise au sens des théorèmes (IV-1) et (IV-2), et en particulier au sens de la topologie forte des opérateurs. Elle est uniforme pour $|z| \leq R - \eta$ $(\eta > 0)$. La quantité $(\beta V)^{-1}$ Log Z converge dans les mêmes conditions vers une fonction analytique de z qui est le prolongement analytique de la pression. Il en résulte que le développement du viriel converge au voisinage de l'origine.

3) Les MDR satisfont un certain nombre de majorations plus ou moins explicites qui dans le cas le plus intéressant (SQ2) ne sont malheureusement pas calculables explicitement. D'autre part, pour des potentiels purement répulsifs, on peut dans certains cas obtenir des informations sur le signe des coefficients des séries en z. En particulier, la série de Mayer est alternée pour des fermions répulsifs. (Théorème (II-2-2)).

4) Les MDR satisfont une propriété de factorisation exprimée par les théorèmes (V-1-1) et (V-2-1,2). Dans le cas le plus intéressant, c'est-à-dire (SQ), cette propriété présente une grande analogie avec celle qu'on obtient en théorie des champs. (24, Théorème 3-4)

5) Pour une valeur physique, c'est-à-dire positive, de l'activité, les MDR du cas (SQ) satisfont la propriété de positivité exprimée par (VI-1-60).

6) En s'appuyant essentiellement sur le résultat précédent, on peut construire au moyen des MDR du cas (SQ) une représentation non triviale des règles d' ε -commutation canoniques, où les MDR sont les valeurs moyennes dans le vide des produits d'opérateurs de champ.

Avant de discuter ces résultats, il est bon de mentionner qu'on peut facilement obtenir des améliorations de détail, et plus précisément étendre légèrement la classe des potentiels pour lesquels ils sont valables.

Dans le cas (SB), la condition (F) n'est pas utilisée. Aucun bénéfice ne résulte donc de la présence du coeur dur et la croissance de ϕ au voisinage de l'origine ne joue un rôle important que par l'intermédiaire de la condition (D). Ceci suggère de remplacer la première partie de la condition (C) par la condition plus faible.

(γ) ϕ_- est intégrable dans tout l'espace, et ϕ_+ est intégrable en dehors d'une région bornée :

$$\int_{|x| \geq b(>a)} \phi_+(x)\, dx < +\infty \qquad (1)$$

La contribution de ϕ_+ pour $|x| \leq b$ aux divers noyaux intégraux est majorée par celle d'un coeur dur de rayon b, et toutes les démonstrations restent valables en remplaçant a par b dans les définition de $V(\omega)$ et de $v(\omega)$. Ceci permet en particulier d'utiliser des potentiels ayant une croissance arbitraire au voisinage d'un coeur dur de rayon $a > 0$, ou de potentiels sans coeur dur ($a = 0$) à croissance arbitraire au voisinage de l'origine, par exemple un potentiel de Lennard Jones en $1/r^{12}$.

Dans le cas (SQ), on peut également remplacer la première partie de (C) par (γ) et permettre une croissance arbitraire de ϕ près du coeur. Mais la condition (E) ou la condition (F) sont essentielles pour le succès de la méthode, et on doit conserver l'hypothèse d'un coeur dur ($a>0$) si le potentiel n'est pas purement répulsif.

L'interprétation physique des résultats obtenus est claire : d'une part, l'existence de la limite quand le volume devient infini, pour z physique, c'est-à-dire réel positif et satisfaisant $z < R$, de la pression et des MDR signifie que le système obéit aux lois de la thermodynamique et que les variables macroscopiques existent. Des résultats plus précis

sur la pression avaient déjà été obtenus, pour z réel positif et pour des potentiels satisfaisant des conditions assez voisines de celles qu'on a utilisées ici [11]. D'autre part, et c'est là le point nouveau, la pression et les MDR sont des fonctions analytiques de z pour $|z| < R$. Il en est de même de la densité. Par suite, le système existe dans une seule phase et ne présente pas de transition de phase dans cette région. Cette phase possède les propriétés qu'on attend d'un gaz. Elle est homogène, car $\rho(x,y)$ est invariant par translation. Elle est isotrope si le potentiel est à symétrie sphérique. Enfin, la propriété de factorisation signifie que cette phase ne présente pas de corrélations à grande distance.

Un des problèmes de la mécanique statistique de l'équilibre, aussi bien quantique que classique, est la description des transitions de phase. De ce point de vue, le résultat de cette étude est négatif : on a obtenu en effet des conditions suffisantes pour qu'aucune transition n'apparaisse. Il semble peu probable qu'on puisse obtenir des résultats plus constructifs dans cette direction par la même méthode. En effet, d'une part la convergence des séries en z n'est pas une condition nécessaire de l'absence de transition de phase, si bien qu'une connaissance exacte du rayon de convergence des diverses séries apporterait peu d'information sur la présence ou l'absence de transition. D'autre part, et bien qu'aucun exemple calculable non trivial ne permette de s'en assurer, il est probable que les majorations obtenues sont en général mauvaises. L'indice le plus clair à cet égard est qu'il n'apparait ni dans la méthode ni dans les résultats, de différence notable entre les statistiques de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac, ce phénomène provenant évidemment du fait qu'on majore des sommes ou des séries en majorant chaque terme en module, et qu'on perd ainsi toute information sur les signes de ces termes.

S'il semble difficile d'atteindre les transitions de phase par la pré-

sente méthode, en revanche, il est sans doute possible d'aborder le problème des systèmes hors d'équilibre. Par des prolongements analytiques analogues à ceux de la référence (12), il est certainement possible d'introduire la variable temps dans le problème. Introduire une variable temps par particule ne devrait entrainer que des complications algébriques, si bien que le formalisme précédent devrait permettre d'aborder l'étude non seulement des MDR, mais aussi des fonctions de Green dépendant du temps.

On peut enfin remarquer que, si la méthode basée sur l'intégrale de Wiener est extrémement commode pour mettre en évidence la structure algébrique du problème et établir des théorèmes généraux d'existence ou de passage à la limite, en revanche elle restera impropre à calculer directement des résultats numériques tant qu'il n'existera pas de méthode suffisamment puissante de calcul exact ou approché d'intégrales d'une classe assez vaste de fonctionnelles.

APPENDICE

On étudie dans cet appendice les équations (III-1-44) et (III-2-38) et on établit les propriétés de leurs solutions utilisées dans les chapitres III et V. On traite séparément les cas (SB) et (SQ).

---

1 - STATISTIQUE DE BOLTZMANN

On considère les équations

$$\phi(\omega) \gtrless \xi F(\phi) \equiv \xi \int P_{00}(d\bar{\omega}) \left[v(\omega - \bar{\omega}) + A \right] \exp\left[\phi(\bar{\omega}) \right] \qquad (1\text{-}1)$$

qu'on désignera par ($\geq$), ($=$), etc, selon le signe qui y figure. On cherche les solutions de ($\geq$) correspondant à ξ le plus grand possible, et pour ξ fixé, à ϕ le plus petit possible, de façon à avoir le plus grand rayon de convergence possible des séries en z et la meilleure majoration possible sur les composantes de ρ_Λ.

On se limite d'abord à ξ réel ≥ 0, ϕ réel ≥ 0, et à des fonctions ϕ suffisamment régulières, par exemple continues (l'espace S des trajectoires est muni de la topologie uniforme). Il sera clair par la suite que ce point n'introduit aucune difficulté. L'équation (1-1) possède les propriétés élémentaires suivantes :

1) Si $F(\phi_1)$ existe et si $\phi_1 \geq \phi_2$, alors $F(\phi_2)$ existe et $F(\phi_1) \geq F(\phi_2)$. En particulier, $\phi \geq 0$ implique $F(\phi) \geq (v_o + A)/\lambda^\nu$, où v_o est le volume du coeur dur.

2) Si ($\xi > 0$, $\phi_o \geq 0$) est une solution de ($\geq$) alors la suite $\phi_o, \ldots \phi_n = \xi F(\phi_{n-1})$ est décroissante, bornée inférieurement par $\xi (v_o+A)/\lambda^\nu$, et par suite converge simplement vers une fonction ϕ qui satisfait $\xi (v_o+A)/\lambda^\nu \leq \phi(\omega) \leq \phi_o(\omega)$. ϕ est une solution de (=)

3) Si ($\xi > 0$, $\phi_o > 0$) est une solution de ($\geq$), alors (ξ', ϕ) est aussi une solution de ($\geq$) pour tout ξ' tel que $0 \leq \xi' \leq \xi$. En combinant cette remarque avec la précédente, on voit que si ($\geq$) a une solution (ξ, ϕ), alors (=) a une solution pour tout $\xi' \leq \xi$.

4) Pour ξ assez grand, ($\geq$) n'a pas de solution positive. En effet, si (ξ, ϕ) est une solution de (=), on a :

$$\xi \leq \frac{\phi(\omega)}{F(\phi)} \leq \frac{\lambda^\nu}{v_o+A} \frac{\phi(\omega)}{\exp(\inf \phi)} \leq \frac{\lambda^\nu}{v_o+A} \frac{\inf \phi}{\exp(\inf \phi)} \leq \frac{1}{e} \frac{\lambda^\nu}{v_o+A} \qquad (1\text{-}2)$$

Par suite, il existe $\xi_o \geq 0$ tel que (=) a une solution positive (ξ, ϕ) pour tout $\xi \leq \xi_o$ et pas de solution pour $\xi > \xi_o$. On montrera plus loin que $\xi_o > 0$.

5) Si ($\geq$) admet une solution ($\xi > 0, \phi_o > 0$), alors la suite $\phi_1 = 0, \ldots \phi_n = \xi F(\phi_{n-1})$ est croissante et bornée supérieurement par ϕ_o. Elle converge donc vers une fonction $\phi_\xi \leq \phi_o$, qui est solution de (=). ϕ_ξ est la plus petite solution correspondant au ξ considéré. En effet, si ϕ' est une solution positive de (=), la suite précédente est majorée terme à terme par la suite $\phi'_1 = \phi', \ldots, \phi'_n = \xi F(\phi'_{n-1}) = \phi'$.

On vérifie sur l'exemple trivial où $v(\omega - \bar{\omega})$ est remplacé par 0 que la solution ϕ_ξ peut être différente de ϕ_o.

6) Il importe de montrer que ξ_0 défini dans la remarque 4) n'est pas nul. Il suffit pour celà de trouver une équation

$$\phi(\omega) = \xi \int P_{00}(d\bar{\omega})\ v(\omega, \bar{\omega})\ \exp\left[\phi(\bar{\omega})\right] \qquad (1\text{-}3)$$

avec

$$w(\omega, \bar{\omega}) \geq v(\omega - \bar{\omega}) + A \qquad (1\text{-}4)$$

qui admette une solution réelle positive ($\xi > 0$, $\phi > 0$). (ξ, ϕ) sera alors solution de $(\geq)$ et par suite $\xi_c \geq \xi > 0$. On aura besoin du résultat suivant.

Lemme (1-1) Il existe une constante $\eta > 0$ (indépendante de ω, $\bar{\omega}$) telle que

$$v(\omega - \bar{\omega}) \leq \eta\ v(\omega)\ v(\bar{\omega})/v_0 \qquad (1\text{-}5)$$

Il est extrémement probable, mais je n'ai pas pu prouver, qu'on peut prendre $\eta = 1$. Il est facile d'obtenir une valeur numériquement ridicule, mais finie, de η. On considère un recouvrement de R^ν par des sphères de rayon a. Pour fixer les idées, on prend les sphères de rayon a centrées aux noeuds d'un réseau cubique de coté a. La région $V(\omega)$ coupe n telles sphères, de centres $M_1, \ldots, M_n$. La région $V(\bar{\omega})$ coupe p telles sphères, de centres $N_1, \ldots, N_p$. Par suite $V(\omega - \bar{\omega})$ est contenu dans la réunion des n.p sphères de centres $M_j + N_k$ et de rayon 2a. Donc $v(\omega - \bar{\omega})$ n.p. $2^\nu v_0$. D'autre part, les n sphères de rayon a qui coupent $V(\omega)$ sont contenues dans la réunion des sphères de rayon 3a centrées en tous les points de ω. Il est facile de voir que le volume de cette région n'excède pas $3^\nu v(\omega)$. Enfin, les n sphères de rayon a/2 centrées en

$M_1, \ldots, M_n$ sont disjointes. Par suite $n\, v_o\, 2^{-\nu} \leq 3^{\nu}\ v(\omega)$. On montre de même que $p\, v_o\, 2^{-\nu} \leq 3^{\nu}\ v(\bar{\omega})$. Finalement

$$v(\omega - \bar{\omega})\, v_o \leq 2^{\nu}\ (n\, v_o)(p v_o)$$

$$\leq 72^{\nu}\ v(\omega)\ v(\bar{\omega})$$

D'où le lemme avec $n = 72^{\nu}$

La valeur exacte de n ne joue aucun rôle dans ce qui suit. On prend pour simplifier $n = 1$.

On peut alors prendre dans (1-3) pour $w(\omega, \bar{\omega})$ le noyau séparable

$$w(\omega, \bar{\omega}) = v_o^{-1}\, v(\omega)\ v(\bar{\omega}) + A \tag{1-6}$$

Les solutions de (1-3) sont alors de la forme $\phi(\omega) = \tau\, v(\omega) + \sigma$, et (1-3) se réduit à deux équations pour déterminer σ et τ :

$$\begin{cases} F(\sigma, \tau, \xi) \equiv v_o - \xi\, e^{\sigma} \int P_{00}(d\bar{\omega})\, v(\bar{\omega}) \exp\left[\tau\, v(\bar{\omega})\right] = 0 \\ G(\sigma, \tau, \xi) \equiv \sigma - A\, \xi\, e^{\sigma} \int P_{00}(d\bar{\omega}) \exp\left[\tau\, v(\bar{\omega})\right] = 0 \end{cases} \tag{1-7}$$

$$\text{On pose } f_{\beta\tau}(x) = \int P_{0x}^{\beta}(d\omega) \exp\left[\tau\, v(\omega)\right] \tag{1-8}$$

On montre maintenant que (1-8) et par suite (1-7) ont un sens. On établit d'abord que pour β réel positif assez petit, $f_{\beta\tau}$ existe et est une fonction intégrable et bornée de x. Soit

$$K'_p = K'(b, \beta/2p) \tag{1-9}$$

où $K'(r, \vartheta)$ est défini par (1-2-22), et où b est réel > 0. Si $\omega \notin K'_p$, alors ω est contenue dans la réunion des p sphères de rayon b centrées aux points $\omega((2n-1)\,\beta/2p)$, $n = 1, \ldots p$. Par suite $v(\omega) \leq p\, v$ où v est le volume d'une sphère de rayon $a + b$. Il en résulte immédiatement que

$$|f_{\beta\tau}(x)| \leq \psi_\beta(x) + (e^{\nu|\tau|}-1)\left\{\psi_\beta(x) + \sum_1^\infty e^{p\nu|\tau|} P_{ox}(K'_p)\right\} \tag{1-10}$$

où $$P_{ox}(K'_p) = \int_{\omega \in K'_p} P_{ox}(d\omega). \tag{1-11}$$

et de la même façon

$$\int |f_{\beta\tau}(x)|\,dx \leq 1 + (e^{\nu|\tau|}-1)\left\{1 + \sum_1^\infty e^{p\nu|\tau|} P_o(K'_p)\right\} \tag{1-12}$$

où $P_o(K'_p) = \int_{\omega \in K'_p} P_{ox}(d\omega)dx.$ (1-13)

Mais d'après (I-2-22)

$$P_{ox}(K'_p) \leq \frac{c}{\lambda^\nu}\ 2p\ \sigma(b/4,\ \beta/2p) \tag{1-14}$$

où $\sigma(b/4,\ \beta/2p) \simeq$ (polynôme en $p\ b^2/8\beta$) $\times$ exp. $(-pb^2/8\beta)$ (1-15)

Par suite, pour $\beta < b^2/8\nu|\tau|$, la série (1-10) est absolument convergente, et $f_{\beta\tau}$ est une fonction bornée de x. En utilisant des majorations analogues de $P_o(K'_p)$ (voir réf. (12) et en particulier l'appendice 1 de celle-ci) on voit qu'avec la même condition sur β, la série (1-12) est absolument convergente et $f_{\beta\tau}$ et une fonction intégrable de x.

On montre ensuite que pour tout τ complexe et tout $\beta > 0$, $f_{\beta\tau}$ existe, est bornée et intégrable. A deux trajectoires quelconques ω_1 et ω_2 de longueurs respectives β_1 et β_2 et telles que $\omega_1(\beta_1) = \omega_2(0)$, on associe la trajectoire $\omega_1 \cup \omega_2$ de longueur $\beta_1 + \beta_2$ définie par :

$$\begin{aligned} \omega_1 \cup \omega_2(t) &= \omega_1(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq \beta_1 \\ &= \omega_2(t-\beta_1) \text{ pour } \beta_1 \leq t \leq \beta_1 + \beta_2 \end{aligned} \tag{1-16}$$

Il est clair que $v(\omega_1 \cup \omega_2) \leq v(\omega_1) + v(\omega_2) - v_o < v(\omega_1) + v(\omega_2)$

Par suite, pour tout τ complexe,

(1-17)

$$|f_{\beta_1 + \beta_2, \tau}| \leq f_{\beta_1, |\tau|} * f_{\beta_2, |\tau|} \qquad (1\text{-}18)$$

où $*$ signifie le produit de convolution. Il en résulte en particulier que :

$$|f_{\beta \tau}(x)| \leq f^{*n}_{\beta/n, |\tau|}(x) \qquad (1\text{-}19)$$

et par suite

$$\| f_{\beta \tau} \|_1 \equiv \int |f_{\beta \tau}(x)| \, dx \leq \| f_{\beta/n, |\tau|} \|_1^n \qquad (1\text{-}20)$$

et $\| f_{\beta \tau} \|_\infty \equiv \sup_x |f_{\beta, \tau}(x)| \leq \| f_{\beta/n, |\tau|} \|_1^{n-1} \| f_{\beta/n, |\tau|} \|_\infty$ (1-21)

Pour tout τ complexe et tout β réel positif, on peut choisir n assez grand pour que le second membre de (1-19) existe. Il en résulte que $f_{\beta\tau}$ existe, est intégrable et bornée. Enfin, la majoration élémentaire

$$\left| \frac{f_{\beta, \tau_1}(x) - f_{\beta, \tau_2}(x)}{\tau_1 - \tau_2} - \int P_{ox}(d\omega)\, v(\omega) \exp\left[\tau_2 v(\omega)\right] \right| \leq |\tau_1 - \tau_2| \, f_{\beta, |\tau_2| + |\tau_1 - \tau_2|}(x) \qquad (1\text{-}22)$$

montre que $f_{\beta, \tau}$ est une fonction entière de τ pour x et β fixé, tandis que le lemme (1-1) permet de montrer facilement que $f_{\beta, \tau}(x)$ est fonction continue de x.

On revient maintenant au système (1-7). Il résulte de ce qui précède que F et G sont des fonctions entières de ξ , σ , τ . Le déterminant

$D(F,G) / D(\sigma , \tau)$ au point $\xi = \sigma = \tau = o$ est égal à v_o. Par suite, le système (1-7) définit σ et τ comme fonctions analytiques de ξ au voisinage de $\xi = 0$, avec $\sigma (0) = \tau (0) = 0$. On vérifie que pour ξ réel positif, σ et τ sont réels positifs (par exemple en exprimant ξ et σ en fonction de τ). Par suite, il existe $\xi > 0$ tel que (1-3) ait une solution positive Donc $\xi_o \neq 0$.

7) On peut montrer que le système (1-1) admet une solution complexe (ξ, ϕ) telle que pour ω fixé, ϕ est une fonction analytique de ξ pour $|\xi| < \xi_o$, et que ϕ coincide avec ϕ_ξ sur le segment $[0, \xi_o[$. La démonstration est élémentaire et utilise l'existence d'une solution de (1-3) analytique au voisinage de $\xi = 0$.[23] Ce résultat ne sera pas utilisé.

8) On donne enfin quelques propriétés de $\phi_\xi(\omega)$ $(0 \leq \xi < \xi_o)$, de $\Delta(\omega) = \xi \exp\left[\phi_\xi (\omega)\right]$ et de f_β définie par (III-1-45). ϕ_ξ et Δ sont invariantes par translation. Si $\| \omega - \omega' \| \leq \varepsilon a$, on voit facilement que

$$(1+\varepsilon)^{-\nu} \; v(\omega') \leq v(\omega) \leq (1+\varepsilon)^{\nu} \; v(\omega') \qquad (1\text{-}23)$$

Il en résulte que ϕ_ξ et Δ sont des fonctions continues de ω. En particulier, $\Delta(\omega)$ satisfait la condition ($\Delta 1$) de la section (II-1) Reportant la majoration du lemme (1-1) dans (1-1), on obtient pour ϕ_ξ la majoration :

$$\phi_\xi (\omega) \leq \tau \; v(\omega) + \sigma \qquad (1\text{-}24)$$

avec $$\tau = v_o^{-1} \; \xi \int P_{00}(d\omega) \; v(\omega) \exp\left[\phi_\xi (\omega)\right]$$

$$\sigma = A \; \xi \int P_{00}(d\omega) \; \exp\left[\phi_\xi (\omega)\right] = A f_\beta (o) \qquad (1\text{-}25)$$

Il résulte de (1-24) et des propriétés de $f_{\beta\,\tau}$ que $\Delta(\omega)$ est intégrable et satisfait la condition ($\Delta 2$) de la section (II-1). Enfin, $f_\beta (x)$ est

une fonction continue, bornée et intégrable de x.

Limite du volume infini . On prouve maintenant les deux propriétés limites utilisées au chapitre IV. On montre d'abord que l'intégrale

$$\int_{K'(\ell/2,\ \beta\ )} P_{00}(d\bar{\omega}\ )\ (v(\omega\ -\bar{\omega}\ )+A)\ \ \Delta(\ \bar{\omega})\ \alpha_{\ L}(\ \omega\ ) \qquad (1\text{-}26)$$

tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini, pour $L = L_o + p\ell$, L_o et p étant des constantes positives. On majore $v(\omega - \bar{\omega})$ par $v_o^{-1}\ v(\omega)\ v(\bar{\omega})$.

$\alpha_L(\omega)\ \ v(\omega)$ admet une majoration du type constante $\times L^{\nu}$;
il suffit donc de montrer que

$$\int_{K'(r,\ \beta\ )} P_{00}(d\ \omega)\ \ v(\omega)\ \Delta\ (\omega\ )$$

tend vers zéro quand r tend vers l'infini plus vite que toute puissance de r. Mais si $\omega \in K'(r,\ \beta\ )$ alors $v(\omega) \geq$ constante $\times$ r. Il suffit donc de montrer que pour tout n entier positif, l'intégrale $I_n(r)$ définie par

$$I_n(r) = \int_{K'(r,\ \beta\ )} P_{00}(d\omega\ )\left[v(\omega)\right]^n\ \ \Delta\ (\omega\ ) \qquad (1\text{-}27)$$

tend vers zéro quand r tend vers l'infini. On majore $\Delta\ (\omega\ )$ au moyen de (1-24).

$$I_n(r) \leq e^{\sigma} \int_{K'(r,\ \beta)} P_{00}\ (d\omega\ )\ \ (v\ (\omega\ ))^n\ \exp\left[\tau\ v(\ \omega)\right] \qquad (1\text{-}28)$$

La fonction à intégrer est la même que dans l'intégrale qui définit la fonction entière de τ

$$\frac{d^n}{d\tau^{\,n}}\ \ f_{\beta\ ,\ \tau}(0).$$

Elle est donc intégrable. Il en résulte (référence (15), théorème 23 H,

page 97) que $I_n(r)$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini.

La seconde propriété utilisée au chapitre IV est la suivante : l'intégrale

$$\int_{K'(r,\ \beta)} P_{xy}(d\omega)\ \Delta(\omega) \tag{1-29}$$

tend vers zéro quand r tend vers l'infini uniformément en (x, y). En raison de l'invariance de $\Delta(\omega)$ et de $K'(r, \beta)$ par translation, on ne restreint pas la généralité en prenant x à l'origine. On majore $\Delta(\omega)$ au moyen de (1-24), on décompose ω en deux demi trajectoires de longueur $\beta/2$ et on majore $v(\omega)$ en utilisant (1 - 17). D'autre part, si $\omega \in K'(r, \beta)$, l'une au moins des demi trajectoires est dans $K'(r/2, \beta/2)$. Par conséquent :

$$\int_{K'(r,\ \beta)} P_{ox}(d\omega)\ \Delta(\omega) \leq 2\ \xi e^{\sigma} \int_{K'(r/2,\ \beta/2)} P_{o\,u}^{\beta/2}(d\omega') \tag{1-30}$$

$$du \exp\left[\tau v(\omega')\right] \int P_{u\,x}^{\beta/2}(d\omega'') \exp\left[\tau\ v(\omega'')\right]$$

$$\leq 2\ \xi e^{\sigma} \|f_{\beta/2,\tau}\|_{\infty} \int_{K'(r/2,\ \beta/2)} P_{ou}^{\beta/2}(d\omega)\, du \exp\left[\tau\ v(\omega)\right] \tag{1-31}$$

Le dernier facteur, et par suite le dernier membre, est indépendant de x et tend vers zéro quand r tend vers l'infini, d'où le résultat.

Propriétés de $h(x)$. On établit maintenant les propriétés de $h(x)$ définie par (V-1-46) qu'on a utilisées dans la section (V-1). La symétrie de la relation entre les trajectoires ω, $\bar{\omega}$ et $\omega - \bar{\omega}$, et le lemme (1-1) entrainent l'inégalité :

$$\frac{v_o}{v(\bar{\omega})} \leq \frac{v(\omega - \bar{\omega})}{v(\omega)} \leq \frac{v(\bar{\omega})}{v_o} \qquad (1\text{-}32)$$

Par conséquent :

$$h(x) \leq \left\{ \int P_{ox}(d\bar{\omega}) \ (v(\bar{\omega})+A) \ \Delta(\bar{\omega}) \right\} / \left\{ v_o^2 \int P_{00}(d\bar{\omega}) \, v(\bar{\omega})^{-1} \, \Delta(\bar{\omega}) \right\} \qquad (1\text{-}33)$$

Donc h(x) est intégrable et bornée. On montre enfin que $h(x) \geq f_\beta(x)/f_\beta(o)$. (V-1-46) peut s'écrire

$$h(x) = \sup_\omega \left\{ \left[\int P_{ox}(d\bar{\omega}) \frac{v(\omega-\bar{\omega})+A}{v(\omega)} \Delta(\bar{\omega}) \right] \left[P_{00}(d\bar{\omega}) \frac{v(\omega-\bar{\omega})+A}{v(\omega)} \Delta(\bar{\omega}) \right]^{-1} \right\} \qquad (1\text{-}34)$$

Soit ω_o une trajectoire fixe non réduite à un point, par exemple un segement de droite $\omega_o(t) = t\, x_o/\beta$ avec $x_o \neq 0$. Soit $\omega = m\,\omega_o$ la trajectoire définie par $\omega(t) = m\,\omega_o(t)$. Quand m tend vers l'infini, $\left[v(\omega - \bar{\omega}) + A \right] v(\omega)^{-1}$ tend vers 1 pour tout $\bar{\omega}$ fixe, c'est-à-dire, considéré comme fonction de $\bar{\omega}$, tend simplement vers 1. D'autre part, cette même fonction est majorée par $(v(\bar{\omega})+A)/v_o$. Par suite, en vertu du théorème de Lebesgue, le numérateur et le dénominateur de (1-34) tendent respectivement vers $f_\beta(x)$ et $f_\beta(o)$, d'où le résultat.

---

2 - STATISTIQUES QUANTIQUES

On considère maintenant le système :

$$\phi(\omega,k) \geq F_k(\xi,\phi) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j \int P_{00}^j(d\bar{\omega}) \exp\left[\phi(\bar{\omega},j)\right] \left\{ \frac{1}{j} v(\omega,\bar{\omega}) + kA_- e^{2j\beta B} + kA_+ \right\} \qquad (2\text{-}1)$$

ou plus simplement

$$\phi \geq F(\xi, \phi)$$

on se limite à la recherche des solutions du type ($\xi \geq 0$, $\phi \geq 0$). On indique par $\phi_1 \geq \phi_2$ que $\phi_1(\omega, j) \geq \phi_2(\omega, j)$ pour tout ω et tout j. Les remarques 1) à 5) de la section (1) s'appliquent sans changement ici. On montre maintenant que $\xi_o \neq 0$

(6) On montre comme précédemment que $v(\omega, \bar{\omega}) \leq v(\omega)\, v(\bar{\omega})/v_o$. (2-2).

On considère donc le système d'équations

$$\phi(\omega, k) = \sum_1^\infty \xi^j \int P_{00}^j(d\bar{\omega}) \exp\left[\phi(\bar{\omega}, j)\right] \left\{ \frac{1}{jv_o} v(\omega)\, v(\bar{\omega}) + kA_- e^{2j\beta B} + kA_+ \right\} \qquad (2\text{-}3)$$

Les solutions de (2-3) sont de la forme $\phi(\omega, k) = \tau v(\omega) + k\sigma$, où τ et σ sont déterminés par le système d'équations

$$\begin{cases} F(\sigma, \tau, \xi) \equiv \tau v_o - \sum_1^\infty \frac{1}{j} (\xi e^\sigma)^j \int P_{00}^j(d\omega)\, v(\omega) \exp\left[\tau v(\omega)\right] = 0 \\ G(\sigma, \tau, \xi) \equiv \sigma - \sum_1^\infty \frac{1}{j} (\xi e^\sigma)^j (A_- e^{2j\beta B} + A_+) \int P_{00}^j(d\omega) \exp\left[\tau v(\omega)\right] = 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}4)$$

Il résulte de (1-17) que pour tout τ complexe

$$\left| \int P_{00}^j(d\omega) \exp\left[\tau v(\omega)\right] \right| = \left| f_{j\beta, \tau}(o) \right| \leq \| f_{j\beta, \tau} \|_\infty \leq \| f_{\beta, |\tau|} \|_\infty \| f_{\beta, |\tau|} \|_1^j \qquad (2\text{-}5)$$

par suite, les séries dans (2-4) convergent pour $\xi e^\sigma \| f_{\beta, |\tau|} \|_1 < 1$ et pour $e^\sigma \xi e^{2\beta B} \| f_{\beta, |\tau|} \|_1 < 1$ respectivement. D'autre part,

$f_{j\beta,\tau}$ est une fonction entière de τ. Il en résulte que $F(\sigma, \tau, \xi)$ et $G(\sigma, \tau, \xi)$ sont des fonctions analytiques de (σ, τ, ξ) au voisinage de $\xi = \sigma = \tau = 0$. En outre $D(F,G)/D(\sigma, \tau) = v_0$ au point $\xi = \sigma = \tau = 0$. Par suite (2-4) détermine σ et τ comme fonctions analytiques de ξ au voisinage de $\xi = 0$, avec $\sigma(0) = \tau(0) = 0$. Pour ξ réel positif, σ et τ sont réels positifs. Par suite (2-3) a une solution pour des valeurs strictement positives de ξ, donc $\xi_0 \neq 0$.

7) La remarque 7) de la section précédente s'applique sans changement ici.

8) On donne enfin quelques propriétés des solutions $\phi_\xi(\omega, j)$ $(0 \leq \xi < \xi_0)$, $\Delta(\omega, j)$ défini par (III-2-37) et g_ξ défini par (III-2-40). Les fonctions $\phi_\xi(\omega, j)$ et $\Delta(\omega, j)$ sont invariantes par translation et sont des fonctions continues de (ω, j) pour chaque j. En particulier, Δ satisfait la condition $(\Delta 1)$ de la section (II-2). Reportant la majoration du lemme (1-1) dans (2-1), on obtient pour ϕ_ξ la majoration :

$$\phi_\xi(\omega, k) \leq \tau\, v(\omega) + o(k) \tag{2-6}$$

avec
$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{v_0} \displaystyle\sum_1^\infty \frac{\xi^j}{j} \int P_{00}^j(d\omega)\, v(\omega) \exp\left[\phi_\xi(\omega, j)\right] \\ \sigma = \displaystyle\sum_1^\infty \xi^j (A_- e^{2j\beta B} + A_+) \int P_{00}^j(d\omega) \exp\left[\phi_\xi(\omega, j)\right] \end{cases} \tag{2-7}$$

Il résulte immédiatement de (2-1) que pour tout couple (ω_1, j_1), (ω_2, j_2):

$$\phi(\omega_1, j_1) \leq \phi(\omega_1 \cup \omega_2, j_1 + j_2) < \phi(\omega_1, j_1) + \phi(\omega_2, j_2) \tag{2-8}$$

(2-6) et les majorations vues précédemment pour $f_{j\beta\tau}$ entrainent que

$\Delta(\omega, j)$ est une fonction $P^{j}_{x,y}$ - intégrable de (ω, j) et satisfait de plus la condition (Δ 2) de la section (II-2). On définit maintenant

$$g_{\xi\xi'}(x) = \sum_{1}^{\infty} \xi'^{,j} \int P^{j}_{ox}(d\omega) \exp\left[\phi_{\xi}(\omega, j)\right] \tag{2-9}$$

La fonction $g_{\zeta}(x)$ définie par (III-2-40) est alors donnée par

$$g_{\xi}(x) = g_{\xi\xi'}(x) \tag{2-10}$$

La convergence pour $\xi < \xi_o$ de la série qui figure dans (2-1) entraine que $g_{\xi\,\xi'}(o)$ existe pour $\xi < \xi_o$, $\xi' < \xi_o\, e^{2\beta B}$. Il est très probable, mais je n'ai pas pu montrer, qu'avec les mêmes hypothèses la série (2-9) converge en norme dans L^1. Il résulte cependant de (2-8) que

$$\int P^{j}_{ox}(d\omega) \exp\left[\phi_{\xi}(\omega, j)\right] dx \leq \left\{\int P^{1}_{ox}(d\omega) \exp\left[\phi_{\xi}(\omega, 1)\right] dx\right\}^{j} \tag{2-11}$$

Par suite, la série (2-9) converge en norme dans L^1 pour tout $\xi < \xi_o$ et :

$$\xi' < \left\{\int P^{1}_{ox}(d\omega)\, dx \exp\left[\phi_{\xi}(\omega, 1)\right]\right\}^{-1} \tag{2-12}$$

Il existe donc ξ_1 $(0 < \xi_1 \leq \xi_o)$ tel que $g_{\xi}(x)$ converge dans L^1 pour $\xi < \xi_1$. La convergence de (2-9) dans L^1 entraine sa convergence dans L^{∞}, c'est-à-dire sa convergence uniforme, grâce à (2-8). Une conséquence immédiate est que $g_{\xi}(x)$ est une fonction continue de x pour $\xi < \xi_1$. Finalement, la condition (Δ3) de la section (II-2) est vérifiée pour $\xi < \xi_1$.

Limite du volume infini. On établit maintenant les deux propriétés limites utilisées dans le chapitre IV. On montre d'abord que l'expression (IV-20) tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini pour $L = L_o + p\,\ell$, L_o et p étant des constantes positives. De même que dans la section (1), il suffit

de montrer que les deux séries :

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{2j\beta B} \int_{K'(\ell/2, j^{\beta})} P_{00}^{j}(d\omega)\ \Delta(\omega, j) \qquad (2\text{-}13)$$

et $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_{K'(\ell - a, j\beta)} P_{00}^{j}(d\omega)\ v(\omega)^{n}\ \Delta(\omega, j) \qquad (2\text{-}14)$$

tendent vers zéro quand ℓ tend vers l'infini. Il résulte de la convergence de la série (2-1) que ces deux séries convergent uniformément par rapport à ℓ. (On voit facilement que la présence de $v(\omega)^n$ dans la seconde n'altère pas cette propriété). D'autre part, chaque terme tend vers zéro quand ℓ tend vers l'infini (référence (15), théorème 23 H). Le résultat est donc démontré.

On montre maintenant que $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{K'(r,\ j\beta)} P_{xy}^{j}(d\omega)\,\Delta(\omega, j)$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini uniformément par rapport à (x, y). Si la trajectoire $(\omega, j) = (\omega_1, j_1) \cup (\omega_2, j_2)$ est dans $K'(r, j\beta)$, alors la trajectoire (ω_1, j_1) est dans $K'(r/2, j_1\beta)$ ou la trajectoire (ω_2, j_2) est dans $K'(r/2, j_2\beta)$. De cette remarque et de (2-8) on déduit que :

$$\sum_{j=2}^{\infty} \int_{K'(r,\ j\beta)} P_{xy}^{j}(d\omega)\,\Delta(\omega, j) \leq \int_{K'(r/2,\beta)} P_{x\,u}^{1}(d\omega)\,du\ \Delta(\omega, 1) \times$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \int P_{u\ y}^{j}(d\omega)\ \Delta(\omega, j) \right\} + \int P_{x\,u}^{1}(d\omega)\ \Delta(\omega, 1)\ du \qquad (2\text{-}15)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K'(r/2,\ j\beta} P_{u\,y}^{j}(d\omega)\,\Delta(\omega, j) \right\}$$

$$\leq \| g_\xi \|_\infty \int_{K'(r/2, j\beta)} P^1_{o\,u}(d\omega)\, du\, \Delta(\omega, 1) + \| \int P^1_{o\,x}(d\omega)\, \Delta(\omega, 1) \|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} \int_{K'(r/2,\, j\beta)} P^j_{o\,u}(d\omega)\, du\, \Delta(\omega, j) \tag{2-16}$$

Les deux termes de (2-16) sont indépendants de (x, y) et tendent vers zéro quand r tend vers l'infini. On a laissé de côté dans la somme initiale le terme j = 1. On montre par la même méthode que dans la section précédente que ce terme tend vers zéro uniformément en x et y. Le résultat est donc démontré.

Propriété de factorisation

On considère le système (V-2-74) qu'on met sous la forme

$$\phi \geq F(\xi, \phi) + u\, G(\xi, \phi) \tag{2-17}$$

en posant $\Delta'(\omega, k) = \xi^k \exp\left[\phi(\omega, k)\right]$ (2-18)

$F(\xi, \phi)$ est le même que dans (2-1), et $G(\xi, \phi) = (G_k(\xi, \phi))$, où

$$G_k(\xi, \phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^j \int P^j_{o\Delta}(d\bar{\omega})\, dx \left\{ v(\omega, \bar{\omega}) + jk(A_- e^{2j\beta B} + A_+) \right\} \times \exp\left[\phi(\bar{\omega}, j)\right] \tag{2-19}$$

Pour $u = o$, (2-17) se réduit à (2-1). Pour $u > o$, on montre comme pour (2-1) que (2-17) a des solutions positives pour $o \leq \xi < \xi_u$. G est positif, donc $\xi_u \leq \xi_o$.

On montre maintenant que si $\xi < \xi_o$ et si g_ξ converge dans L^1, alors, pour tout $\xi' < \xi$ (2-17) admet une solution (ξ', ϕ) pour u assez petit. Soit (ξ, ϕ_ξ) la solution de (2-1) associée à ξ. On a donc :

$$\phi_\xi \leq F(\xi', \phi_\xi) + \left(\frac{\xi}{\xi'} - 1\right) F(\xi', \phi_\xi) \qquad (2\text{-}20)$$

Si $g_\xi \in L^1$, alors $G(\xi', \phi_\xi)$ existe et admet une majoration de la forme

$$\left[G(\xi', \phi_\xi)\right](\omega, k) \leq M\, v(\omega) + N\, k \qquad (2\text{-}21)$$

D'autre part, $F(\xi', \phi_\xi)$ admet une minoration de la forme :

$$\left[F(\xi', \phi_\xi)\right](\omega, k) \geq M'\, v(\omega) + N'\, k. \qquad (2\text{-}22)$$

où $M' > 0$, $N' > 0$. Par suite, il existe $m > 0$ tel que

$$G(\xi', \phi_\xi) \leq m\, F(\xi', \phi_\xi) \qquad (2\text{-}23)$$

pour tout (ω, k). Donc (2-17) admet une solution (ξ', ϕ_ξ) pourvu que $\mu \leq m^{-1}(\xi/\xi' - 1)$. Il existe donc une solution $(\xi', \phi_{\mu\,\xi'})$ de l'équation $\phi = F(\xi, \phi) + \mu\, G(\xi, \phi)$, et cette solution satisfait $\phi_{\mu\,\xi'} \leq \phi_\xi$. Par suite, la convergence dans L^1 de la série (III-2-40) qui définit g_ξ entraine la convergence dans L^1 de la série (V-2-75) qui définit $g_{\mu\,\xi}$.

REFERENCES

(1) - G. Uhlenbeck et G. Ford, Lectures in Statistical Mechanics, Am. Math. Soc, Providence (1963)

(2) - L. Van Hove, Physica, 15 951 (1949) ; 16 137 (1950)

(3) - T.D.Lee et C.N. Yang, Phys. Rev. 87 404, (1952)

(4) - J. Groeneveld, Phys. Letters 3 50 (1962)

(5) - O. Penrose, J. Math. Phys. 4 1312 (1963)

(6) - J. Lebowitz et O. Penrose, J. Math Phys. 5 , 841, (1964)

(7) - D. Ruelle, Helv. Phys. Acta. 36 183 (1963)

(8) - D. Ruelle, Ann. of Phys. 25 109 (1963)

(9) - D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. 36 580 (1964)

(10) - T.L. Hill, Statistical Mechanics, Mc Graw Hill, New York (1956).

(11) - D. Ruelle, Helv. Phys. Acta 36 789 (1963)+

(12) - E. Nelson J. Math. Phys. 5 332 (1964)
voir aussi : Coll Intern. CNRS. 117 Paris (1962)

(13) - H. Cartan : Bull. Soc. Math. France. 73 74 (1945)

(14) - J.L. Kelley - général Topology.Van Nostrand, New York (1955)

(15) - P.R. Halmos. Measure Theory. Van Nostrand, New York (1950)

(16) - F. Riesz et B. Sz. Nagy. Leçons d'Analyse fonctionnelle.

(17) - C. Bloch. Diagram expansions in quantum statistical mechanics, North Holland Company, Amsterdam (sous presse).

(18) - K. Huang, Statistical Mechanics, Wiley, New York (1963)

(19) - J.E. Mayer et E. Montroll, J. Chem. Phys. 9 2 (1941)

+ Voir aussi : notes de cours à l'Institut de Physique Théorique, Université du Colorado, Boulder, (1963).

(20) - T.D. Lee et C.N. Yang, Phys. Rev. 113 1165 (1959)

(21) - S. Weinberg, Phys. Rev. 133 B232 (1964)

(22) - J. Yvon. Journ. de Phys. 21 42 (1960)

(23) - R. Bratu. Bull Soc Math. France 42. 113 (1914)

(24) - D. Ruelle J. Math Phys. 6 201 (1965).

(25) - R.F. Streater et A.S. Wightman. PCT, Spin and Statistics and all that,Benjamin,New York (1964)

(26) - A.S. Wightman Phys. Rev. 101, 860 (1956)

(27) - H. Araki et E.J. Woods , J. Math Phys. 4 637 (1963)

(28) - H. Araki et W. Wyss. Helv. Phys. Acta 37 136. (1964)

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Combinaison de l'invariance relativiste et des symétries internes

Vu et approuvé :
Paris, le 22 Avril 1965
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE